

**Photospaltung im elektrostatischen
Feld eines Kerns**

Horst - D. Steinhöfer

1981



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551903_0064

Photospaltung im elektrostatischen

Feld eines Kerns

Dissertation

der

Fakultät für Physik

der

Ludwig-Maximilians-Universität

München

vorgelegt von

Horst-D. Steinhöfer

aus München

München, den 1. Dezember 1980



1. Gutachter : Prof. Dr. H. Salecker

2. Gutachter : Prof. Dr. H. Fritzsche

Tag der mündlichen Prüfung : 21. Juli 1911

Inhaltsverzeichnis

Seite

0. Zusammenfassung	1
1. Die Photonspaltung in einem elektro- magnetischen Feld	
1.0 Einleitung	4
1.1 Die Photonspaltung im elektrostatischen Feld eines Korns	10
1.2 Die niedrigste störungstheoretische Ordnung	13
1.3 Übersicht über Kinematik, invariante Variable und Polarisationsbasis	18
2. Der differentielle Wirkungsquerschnitt τ	
2.1 Analytische Darstellung des differentiellen Wirkungsquerschnitts τ	24
2.2 Streuung eines Photons in Vorwärtsrichtung	32
2.3 Numerische Resultate zum differentiellen Wirkungsquerschnitt τ	36
3. Der teilintegrierte Wirkungsquerschnitt Σ	
3.1 Vergleich mit bisher vorliegenden Aussagen	43
3.2 Der Einfluß der Abschirmung des Kernfeldes	48
3.3 Das Winkel- und Energieverhalten von Σ . .	50
3.4 Analytische Interpolationsformel für Σ in Seitwärtsrichtung	60
4. Schlußfolgerungen	69
Anhang 1 Die Amplitudenfunktionen E . . .	71
Anhang 2 Die transzendenten Funktionen B(x) , T(x) und I(x,y,z)	75

Anhang 3	Tabelle der numerischen Resultate für den teilintegrierten Wirkungsquer- schnitt Σ der Photospaltung an Gold	79
Anhang 4	Kurzbeschreibung des Programms COMRAT zur analytischen Manipulation ein- facher rationaler Ausdrücke	92
Anhang 5	Zur numerischen Integration von γ . . .	94
Literaturverzeichnis		100

0. Zusammenfassung

Die Aufspaltung eines Photons in zwei Photonen in einem elektromagnetischen Feld ist einer der nicht-linearen elektromagnetischen Effekte, die die Quantenelektrodynamik vorhersagt. Da die Photonspaltung bereits in niedrigster störungstheoretischer Näherung durch Diagramme mit geschlossenen Elektronenschleifen beschrieben wird, eignet sie sich darüber hinaus prinzipiell zur eichinvarianten Prüfung des Elektronenpropagators.

Es wurde hier zunächst der differentielle Wirkungsquerschnitt der Photonspaltung im elektrostatischen Feld eines schweren Kerns theoretisch untersucht. Dabei traten einige auffällige Strukturen dieses inelastischen Photonenstreuprozesses bei hohen Energien zutage. An der Schwelle zur reellen intermediären Elektron-Positron-Paarerzeugung hat der differentielle Wirkungsquerschnitt beispielsweise einen nichtdifferenzierbaren Knick. Bei kinematischen Konfigurationen mit verschwindendem transversalen Impulsübertrag ergab sich ein ausgeprägter Peak. Für Vorwärtsstreuung beider Photonen verschwindet der differentielle Wirkungsquerschnitt.

In dem betrachteten Spezialfall, daß nur ein Photon in Vorwärtsrichtung ausläuft, mußten in den Streuamplituden Scheinsingularitäten analytisch kompensiert werden, um den (endlichen) Wirkungsquerschnitt numerisch auswerten zu können. Dafür wurde ein Computerprogramm (COMRAT) zur interaktiven analytischen Manipulation rationaler Ausdrücke entwickelt. Bei Streukonfigurationen mit kleinem Energie-Impulsübertrag auf den Kern erwies es sich erwartungs-

gemäß als notwendig, die Abschirmung des Kernfeldes durch die Hüllenelektronen zu berücksichtigen.

Das jüngste Experiment zum Nachweis der Photonspaltung hat um zwei Größenordnungen größere Meßwerte erbracht, als nach einer theoretischen Abschätzung mit der Weizsäcker-Williams-Approximation zu erwarten steht. Eine Klärung dieser Diskrepanz erforderte die exakte Berechnung des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts, bei dem über die Richtung eines der beiden Streuphotonen integriert werden mußte. Die hier erstmals vorgelegten exakten Werte des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts stimmen mit der Weizsäcker-Williams-Approximation bis auf zwanzig Prozent überein. Die unplausibel großen Meßwerte lassen sich durch inkohärente Hintergrundereignisse erklären, die bei der Messung nicht abgetrennt worden sind.

Bei hinreichend kleinen Streuwinkeln gehen die differentiellen Wirkungsquerschnitte bei verschiedenen Energien durch eine approximative Skalentransformationsformel auseinander hervor. Auch für das Energieverhalten des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts in und nahe der Vorwärtsrichtung des kinematisch fixierten Photons wird eine solche approximative Skalentransformationsformel abgeleitet. In der Vorwärtsrichtung, wo diese Skalentransformationsformel beinahe exakt gilt, ist der teilintegrierte Wirkungsquerschnitt praktisch der Energie des einfallenden Photons proportional.

In der Seitwärtsrichtung ergab sich für den teilintegrierten Wirkungsquerschnitt der hochenergetischen Photonspaltung gleichfalls ein übersichtliches

Verhalten. Eine einfache analytische Näherungsformel wurde entwickelt, die dort den Wirkungsquerschnitt innerhalb eines Fehlers von maximal zwei Prozent wiedergibt. Anders als in Vorwärtsrichtung nimmt er in Seitwärtsrichtung mit zunehmender Energie ab.

Ein experimenteller Nachweis der Photonspaltung steht bis heute aus. Nach den hier vorgelegten theoretischen Ergebnissen sind die Wirkungsquerschnitte der Photonspaltung groß genug, um mit einem Koinzidenzexperiment genau meßbar zu sein.

1. Die Photonspaltung in einem elektromagnetischen Feld

1.0 Einleitung

Ein Prozeß wie die Aufspaltung eines Photons in zwei Photonen in einem elektromagnetischen Feld ist nach der Maxwell'schen Theorie nicht möglich. Die klassischen Feldgleichungen des Elektromagnetismus sind linear, und eine Wechselwirkung zwischen elektromagnetischen Feldern ist daher ausgeschlossen. Ein elektromagnetisches Feld kann wegen des Prinzips der linearen Superponierbarkeit keinerlei Einfluß auf eine ebene elektromagnetische Welle ausüben.

In den Quantenfeldtheorien beschreibt man den Teilchenaspekt von Feldern durch den Formalismus der Feldquantisierung. Dieser Operatorformalismus beinhaltet die Darstellbarkeit von Teilchenerzeugung und -vernichtung sowie die einheitliche, gemeinsame Beschreibung von Teilchen und Antiteilchen. Die Quantenelektrodynamik ist die Quantenfeldtheorie zur Beschreibung von Photonen, geladenen Leptonen und deren elektromagnetischer Wechselwirkung. Einer der fundamentalen beobachtbaren Unterschiede zwischen dem klassischen System der Maxwell'schen Gleichungen und der Quantenelektrodynamik besteht darin, daß wegen der Vakuumpolarisation in der Quantenelektrodynamik das Prinzip der linearen Superponierbarkeit elektromagnetischer Felder nicht mehr in Strenge gilt.

Für die Berechnung solcher Effekte stehen allerdings bislang nur Näherungsverfahren zur Verfügung. Das wichtigste ist die systematische störungstheoretische

Entwicklung der Quantenelektrodynamik nach Potenzen der Kopplungskonstanten α (Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante). Wegen der Kleinheit von $\alpha \approx \frac{1}{137}$ genügt dabei meist die Berechnung weniger Ordnungen, um eine ausreichende Übereinstimmung mit experimentellen Resultaten zu erzielen.

Die mathematischen Formeln der Störungstheorie lassen sich mit Graphenregeln aus Feynman-Diagrammen herleiten. Die nichtlinearen elektromagnetischen Effekte werden dabei durch solche Diagramme beschrieben, die in sich geschlossene Elektronenlinien enthalten. Solche nur intermediär in Zwischenzuständen auftretenden virtuellen Elektron-Positron-Paare bewirken, daß sich das Vakuum der Quantenelektrodynamik wie ein nichtlinear polarisierbares Medium verhält.

Die durch die Vakuumpolarisation bewirkte Abweichung vom Coulomb-Gesetz wird in niedrigster Näherung durch eine geschlossene Elektronenschleife mit zwei Ecken beschrieben. Sie liefert nachweisbare Beiträge zur Lambschen Verschiebung und zu den Strahlungskorrekturen von Streuprozessen und anomalem magnetischen Moment. Geschlossene Elektronenschleifen mit drei Ecken liefern wegen der Ladungskonjugationsinvarianz der Quantenelektrodynamik keine Beiträge: Beiträge von Diagrammen, die Vakuumpolarisationsschleifen mit einer ungeraden Anzahl von Ecken enthalten, verschwinden nach dem Furryschen Theorem.

Geschlossene Elektronenschleifen mit vier Ecken geben zum erstenmal Anlaß zu qualitativ neuartigen, nichtlinearen elektromagnetischen Prozessen. Die Vakuumpolarisation vierter Ordnung liefert die niedrigste Näherung für vier derartige Prozesse: Die Streuung

von Licht an Licht, die Streuung von Licht an einem elektromagnetischen Potential (Delbrück-Streuung) und die Aufspaltung eines Photons in zwei Photonen in einem elektromagnetischen Feld, sowie deren Umkehrung, die Verschmelzung zweier Photonen zu einem im elektromagnetischen Feld. Die Möglichkeit solcher grundlegend neuartiger Prozesse wurde bald nach der Einführung der Quantenelektrodynamik erkannt und diskutiert (1).

Nächst ihrer prinzipiellen Stellung in der Quantenelektrodynamik ist die Vakuumpolarisation für die eichinvariante Prüfung des Elektronenpropagators von besonderer Bedeutung. Das heute übliche Programm zur Prüfung der Quantenelektrodynamik mittels Verallgemeinerung der Propagatoren und Vertizes durch invariante Formfaktoren entstand kurz nach der Etablierung der relativistisch invarianten, renormierbaren Störungstheorie (2). Bei der Untersuchung der eichinvarianten Prüfbarkeit des Elektronenpropagators stellte sich heraus, daß nur Streuprozesse mit geschlossenen Elektronenschleifen dafür geeignet sind (3). Neben Strahlungskorrekturen aufgrund der Vakuumpolarisation fallen vor allem die vier oben genannten Photonenstreuprozesse in diese Kategorie. Bis auf die Photonenverschmelzung wurden sie in den letzten Jahren auf ihre Nützlichkeit zur eichinvarianten Prüfung des Elektronenpropagators der Quantenelektrodynamik untersucht (4, 5, 6).

Von den vier genannten Prozessen sind Photon-Photon-Streuung und Photonenverschmelzung derzeit wegen der erforderlichen sehr hohen Photonenintensitäten experimentell schwer realisierbar. Die beiden übrigen bleibenden Prozesse benötigen nur einen einfallenden

den Photonenstrahl und ein Target aus schweren Kernen. Sie sind daher der experimentellen Untersuchung wesentlich leichter zugänglich. Die Delbrück-Streuung wurde bereits mehrfach nachgewiesen und im Bereich zwischen einigen MeV und einigen GeV gemessen (7,9). Versuche zum Nachweis der Photospaltung blieben bislang jedoch ohne greifbares Ergebnis (8); ein vermuteter Nachweis (9) lieferte um zwei Größenordnungen höhere Wirkungsquerschnitte, als aus einer Weizsäcker-Williams-Approximation zu erwarten wäre (10). Der experimentelle Befund aus (9) ist auch mit einigen früheren theoretischen Abschätzungen (11) nicht verträglich und bleibt fragwürdig, wie in der vorliegenden Arbeit detaillierter aufgezeigt werden wird.

Im ersten Kapitel dieser Untersuchung werden einleitend theoretische und experimentelle Aspekte der Photospaltung erörtert und die kinematischen Grundlagen bereitgestellt. Das zweite Kapitel wendet sich der Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts zu. Anhand numerischer Auswertungen werden seine Strukturen im Hinblick auf die experimentelle Situation illustriert. Ihre Auswirkungen auf das Vorgehen bei der nachfolgenden Integration werden diskutiert. Der Grenzfall eines in Vorwärtsrichtung auslaufenden Photons wird unter Zuhilfenahme eines Computerprogramms analytisch untersucht.

Zum Vergleich mit bisher vorliegenden Aussagen befaßt sich das dritte Kapitel mit dem teilintegrierten Wirkungsquerschnitt, bei dem über die Richtung eines der beiden auslaufenden Photonen integriert wird. Die hier vorgelegten exakten Ergebnisse werden mit den experimentellen Aussagen (9) und der numerischen

Auswertung der Weizsäcker-Williams-Approximation (10) verglichen. Die exakten Daten bestätigen die Größenordnung der theoretischen Abschätzung (10). Sie stimmen mit der Weizsäcker-Williams-Approximation bis auf zwanzig Prozent überein. Der Einfluß des Abschirmformfaktors wird kurz beleuchtet und anschließend eine Übersicht über das Verhalten des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts geboten und diskutiert. Die Ergebnisse in Vorwärtsrichtung und der Beweis einer in der engeren Umgebung der Vorwärtsrichtung anwendbaren approximativen Skalentransformationsformel schließen sich an. Das im Prinzip einfache Verhalten des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts in Seitwärtsrichtung wird herausgearbeitet und dazu benutzt, eine einfache Interpolationsformel für diesen Bereich aufzustellen. Mit dieser einfachen analytischen Näherungsformel lassen sich die teilintegrierten Wirkungsquerschnitte in einem weitgehend mit dem experimentell zugänglichen zusammenfallenden Bereich auf weniger als zwei Prozent genau approximieren.

Im vierten Kapitel werden die Schlußfolgerungen über die Möglichkeiten für einen experimentellen Nachweis der Photospaltung zusammengefaßt. Nach den vorgelegten Ergebnissen sind die Wirkungsquerschnitte bei geeigneter Wahl der Konfiguration durchaus groß genug, um eine genaue Koinzidenzmessung der Photospaltung zu ermöglichen. Die hierfür geeignetsten Bedingungen werden noch einmal herausgearbeitet.

Es folgen fünf ergänzende Anhänge. In den ersten beiden Anhängen sind alle Formeln und Funktionen zusammengestellt, die für die Formulierung des differentiellen Wirkungsquerschnitts gebraucht werden.

Anhang 3 gibt in tabellarischer Form alle Datenpunkte wieder, die im Zuge der Auswertung des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts berechnet worden sind.

Anhang 4 liefert eine kurze Beschreibung der Eigenschaften des Programms COMRAT zur interaktiven analytischen Manipulation rationaler Ausdrücke auf einem DEC PDP-15 Computer. In Anhang 5 schließlich wird eine ausführliche Erläuterung aller Vorkehrungen gegeben, die für eine hinreichend genaue numerische Integration des differentiellen Wirkungsquerschnitts getroffen werden mußten.

1.1 Die Photonspaltung im elektrostatischen Feld eines Kerns

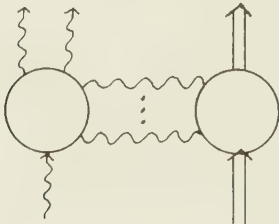
Die Photonspaltung im statischen elektromagnetischen Feld eines Kerns ist derjenige Anteil des doppelten Compton-Effekts am Kern



(1-1)

der im statischen Grenzfall übrigbleibt, wenn man die Masse M des Kerns als unendlich annimmt und den Kern nur noch als Quelle eines statischen elektromagnetischen Feldes auffaßt.

Im statischen Grenzfall können die Photonen wegen der Linearität der Maxwell'schen Gleichungen nicht vom Strom des Kerns absorbiert oder emittiert werden. Ihre Absorption und Emission muß über die vom statischen elektromagnetischen Kernfeld induzierte Vakuum-polarisation erfolgen. Die Photonspaltung wird somit durch das reduzierte Skelettdiagramm



(1-2)

beschrieben. wo die linke Blase die Vakuumpolarisation bedeutet. Die rechte Blase - die elektromagnetische Induktion der Vakuumpolarisation - vertritt unter anderem Rückstoßkorrekturen zur statischen Kinematik und Formfaktoreffekte.

Beide Arten von Korrekturen zur statischen Coulomb-Näherung werden wir später betrachten, wobei bei den Formfaktoreffekten vornehmlich die Abschirmung des Kernfeldes durch die Hüllenelektronen in Rechnung gestellt werden muß. Denn eine eigenständige Betrachtung der Photonspaltung als Prozeß für sich, wie wir sie im weiteren vornehmen wollen, ist nur dort auch experimentell gerechtfertigt, wo die Photonspaltung alle restlichen kohärenten Anteile des doppelten Compton-Effekts deutlich überwiegt. Das ist wegen der unendlichen Reichweite der elektromagnetischen Wechselwirkung vor allem bei kleinen Werten des Energie-Impuls-Übertrages zu erwarten. Dort, im sogenannten elektromagnetischen Peak, bei kleinen Streuwinkeln, macht sich bei schweren Kernen aber auch die Abschirmung des Kernfeldes durch die Hüllenelektronen bemerkbar. Sie muß, wie später detaillierter aufgezeigt werden wird, in vielen Fällen berücksichtigt werden.

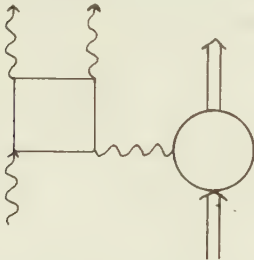
Die Photonspaltung ist als Fünf-Teilchen-Prozeß in der Hochenergiephysik bereits ein komplizierter Vorgang an der Schwelle zu Ereignissen, über die nur noch inklusive Aussagen vorliegen. Tatsächlich ist bislang kein exklusiver Nachweis der Photonspaltung gelungen. Gleichzeitig ist sie aber in störungstheoretischer Näherung analytisch berechenbar, so daß man an diesem Beispiel theoretische Einsichten in die Natur komplizierterer Teilchenvorgänge gewinnen kann.

Schon die niedrigste störungstheoretische Ordnung der Quantenelektrodynamik hört bei Vorgängen rasch auf, sich einfach zu verhalten, die weniger stark durch Invarianzprinzipien eingeschränkt sind als etwa elastische Prozesse.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt der Photonspaltung zeigt unter anderem auffällige Strukturen bei der Annäherung an den Pol des Photonenpropagators, beim Überschreiten der Schwelle zur reellen intermediären Elektron-Positron-Paarerzeugung und bei der Vorwärtstreueung beider Photonen. Bevor wir darauf im zweiten Kapitel ausführlich eingehen, folgen noch einige einführende Erläuterungen.

1.2 Die niedrigste störungstheoretische Ordnung

Die quantenelektrodynamisch niedrigste störungstheoretische Ordnung der Photonspaltung im elektromagnetischen Feld eines Kerns wird durch die Diagrammklasse

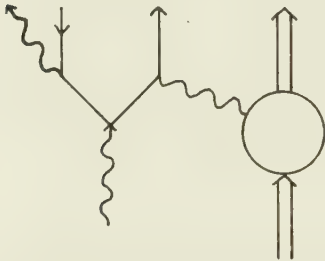


(1-3):

beschrieben. Durch Permutation der freien Photonenimpulse tragen insgesamt sechs solcher Diagramme zum Matrixelement niedrigster Näherung bei. Die Blase am Kern repräsentiert, wie schon im vorigen Abschnitt erläutert, die Erweiterung der statischen Näherung durch Einbeziehung von Formfaktoreffekten und exakter Kinematik. Diagramme des Typs 1-3 existieren natürlich außer für ein virtuelles Elektron-Positron-Paar für alle geladenen Teilchenpaare. Bei kleinen Streuwinkeln trägt jedoch nur das Elektronenvakuum wegen der kleinen Elektronenmasse nennenswert zum Prozeß bei. Die Anteile aller Vakuumpolarisationen durch Teilchen größerer Masse sind erheblich kleiner. Eine Diskussion der Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der Photonspaltung von der Masse des in der geschlossenen Schleife umlaufenden Teilchens findet sich im Zuge der Erläuterung des Verhaltens der Photonspaltung bei eichinvarianter Prüfung des Elektronenpropagators in (6). Neben dem beschriebenen Mechanismus kann

die Photonspaltung auch noch auf anderem Wege ablaufen, etwa unter Einbeziehung eines π^0 .

Bei einer inklusiven Betrachtung der Photonspaltung wie in (9), wo nur eines der gestreuten Photonen registriert wurde, ergeben sich eine Vielzahl weiterer konkurrierender Prozesse. Darunter weist die Paarerzeugung mit Bremsstrahlung

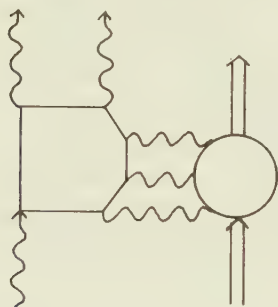


(1-4)

eine Ecke weniger auf als die Photonspaltung. Ihr Wirkungsquerschnitt ist demnach größenordnungsmäßig um einen Faktor α^{-1} höher abzuschätzen als die Photonspaltung. Ein inklusives Vorgehen wie in (9) ist daher als Nachweismethode der Photonspaltung äußerst zweifelhaft. Dies wird im dritten Kapitel der vorliegenden Arbeit noch genauer ausgeführt werden.

Neben die Frage konkurrierender Prozesse gesellt sich die Frage nach dem Beitrag von Diagrammen höherer Ordnung zur Photonspaltung. In den Diagrammen 1-3 tritt neben der Kopplungskonstanten α an den drei Ecken, wo freie Photonen angreifen, auch die Kopplungskonstante $Z\alpha$ (Z ist die Kernladungszahl) der Wechselwirkung zwischen Vakuumpolarisation und elektromagnetischem Kernfeld auf. Für schwere Kerne ist $Z\alpha$ nicht mehr klein gegen eins und die störungs-

theoretische Reihe in $Z\alpha$ könnte daher auch in höheren Ordnungen noch Beiträge liefern, die größenordnungsmäßig denen der niedrigsten Ordnung vergleichbar sind. Das Diagramm



(1-5)

zeigt einen Vertreter der nächsthöheren nichtverschwindenden Ordnung $\propto (Z\alpha)^3$ der Photonspaltung.

Alle Beiträge gerader Potenzen von $Z\alpha$ verschwinden wegen des Furryschen Theorems, da dabei Vakuumpolarisationsschleifen mit einer ungeraden Anzahl von Ecken auftreten. Die Beiträge nichtverschwindender höherer Ordnung in $Z\alpha$ zur Photonspaltung sind bisher noch nicht berechnet worden. Erfahrungen mit der Delbrück-Streuung zeigen aber, daß die Coulomb-Korrekturen am kleinsten bleiben, wenn der Energie-Impuls-Übertrag klein ist. Bei der Photonspaltung kann man nun die Kinematik so wählen, daß der transversale Impulsübertrag verschwindet, wodurch das Quadrat des Energie-Impuls-Übertrages sehr klein wird.

Das Matrixelement niedrigster Ordnung hat als Faktor den Propagator des virtuellen Photons, das den Energie-Impuls-Übertrag auf den Kern übermittelt. Dieser bewegt sich für sehr kleine Werte des Energie-Impuls-Übertrages nahe bei seinem Pol für verschwindenden

Energie-Impuls-Übertrag. In der Umgebung der bezeichneten kinematischen Konfiguration hat der differentielle Wirkungsquerschnitt der Photonspaltung in niedrigster Näherung dementsprechend einen scharfen Peak. Alle Coulomb-Korrekturen haben keinen derartigen globalen Propagatorfaktor. Man kann daher erwarten, daß zumindest in dem kinematischen Bereich verschwindenden transversalen Impulsübertrages die niedrigste Näherung der Photonspaltung für sich meßbar sein sollte, auch wenn in anderen kinematischen Bereichen die höheren Ordnungen in $Z\alpha$ sich als nicht mehr vernachlässigbar herausstellen sollten.

Die Photonspaltung weist keine Infrarotdivergenzen auf. Vielmehr verschwindet ganz allgemein der Tensor einer Vakuumpolarisationsschleife, wenn der Viererimpuls eines beteiligten Photons verschwindet. Dies folgt aus der Eichinvarianz und einer Reihenentwicklung nach den Photonenimpulsen $k^{(j)}$ (12). Obwohl diese Aussage auch für virtuelle Photonen gilt, wird das Auftreten des Peaks bei Konfigurationen mit verschwindendem transversalen Impulsübertrag nicht verhindert. Das Verschwinden des Vakuumpolarisationstensors macht sich nämlich erst bei äußerst kleinen Werten der Photonenviererimpulse bemerkbar und führt nur dazu, daß der Peak in der Mitte einen extrem tiefen, sehr schmalen Einschnitt bekommt, also eigentlich ein Doppelpeak ist (siehe Abschnitt 2.3).

Die Photonspaltung verschwindet auch, wenn beide Photonen in Vorwärtsrichtung gestreut werden. Das Verschwinden des n-fachen Compton-Effekts in Vorwärtsrichtung wurde für die niedrigste störungstheoretische Näherung von Quantenfeldtheorien in (13) allgemein bewiesen. Die Photonspaltung bietet ein Beispiel

für die Gültigkeit dieser Regel auch in höheren Ordnungen des doppelten Compton-Effekts.

Ansonsten zeigen beide hier betrachteten Wirkungsquerschnitte, der differentielle wie der teilintegrierte, das zu erwartende, typisch quantenelektrodynamische Verhalten, daß sie sich bei zunehmender Energie immer mehr in der Vorwärtsrichtung konzentrieren. Sie werden dort zwar mit wachsender Energie immer größer, aber der Vorwärtsspeak wird gleichzeitig immer schmaler, und in der Seitwärtsrichtung nehmen die Wirkungsquerschnitte stark ab.

1.3 Übersicht über Kinematik, invariante Variable und Polarisationsbasis

Wir verwenden durchgehend Einheiten, in denen $\hbar = c = 1$ dimensionslos sind, sowie eine relativistische Metrik mit $x^2 = x_0^2 - \vec{x}^2$. Die vier Photonenimpulse $k^{(j)}$ werden aus Symmetriegründen alle auslaufend gezählt, so daß $-k^{(2)}$ der physikalische Impuls des einlaufenden Photons 2 ist. Alle Größen sind im Laborsystem angegeben, also im Ruhssystem des Kerns vor der Streuung. Die Benennung der Streuwinkel veranschaulicht Abbildung 1.

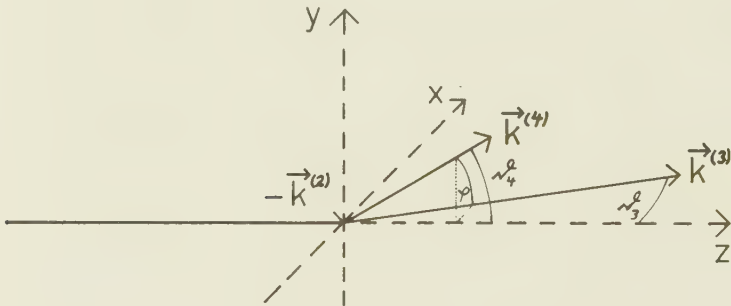


Abbildung 1

Veranschaulichung der kinematischen Größen der Photospaltung. Für die auftretenden Winkel gelten $0 \leq \theta_3, \theta_4 \leq \pi$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

In dem speziellen Koordinatensystem der Abbildung 1 haben die vorkommenden Impulse folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 &\text{einlaufendes Photon 2} \quad -k^{(2)} = \omega_2(1, 0, 0, 1) \quad , \\
 &\text{einlaufender Kern} \quad P = M(1, 0, 0, 0) \quad , \\
 &\text{auslaufendes Photon 3} \quad k^{(3)} = \omega_3(1, \sin \alpha_3^0, 0, \cos \alpha_3^0) \quad , \\
 &\text{auslaufendes Photon 4} \quad k^{(4)} = \omega_4(1, \sin \alpha_4^0 \cos \varphi, \sin \alpha_4^0 \sin \varphi, \cos \alpha_4^0) .
 \end{aligned}
 \tag{1-6}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 &\text{Energie-Impuls-Übertrag} \quad k^{(1)} = -k^{(2)} - k^{(3)} - k^{(4)} \quad , \\
 &\text{auslaufender Kern} \quad P' = P + k^{(1)}
 \end{aligned}
 \tag{1-7}$$

gelten für die Impulse die Relationen

$$\begin{aligned}
 &k^{(j)2} = 0 \quad \text{für} \quad j = 2, 3, 4 \quad , \\
 &P^2 = P'^2 = M^2 \quad , \\
 &\sum_{j=1}^4 k^{(j)} = \sum_{j=2}^4 k^{(j)} = P + P' \quad (\text{Energie-Impuls-Erhaltung}).
 \end{aligned}
 \tag{1-8}$$

Wegen der Relationen 1-8 ist eine der Energien oder einer der Winkel auf der rechten Seite der Definitionen 1-6 nicht frei wählbar, sondern durch die übrigen Größen bereits festgelegt. Wir wollen die Energie des auslaufenden Photons 4 durch die anderen Bestimmungsstücke ausdrücken. Bezeichnet man die auf den Kern übertragene Energie $k_o^{(1)} = \omega_2 - \omega_3 - \omega_4$ als $\Delta\omega$ und verwendet die obigen Beziehungen, so erhält man

$$\begin{aligned} k^{(i)2} &= (P' - P)^2 = 2M^2 - 2M(M + \Delta\omega) = \\ &= -2M\Delta\omega. \end{aligned} \quad (1-9)$$

Daraus wird durch Einsetzen ($\hat{k}^{(ij)} = \frac{\vec{k}^{(ij)}}{k^{(ij)}}$) bezeichnet die Einheitsvektoren zu $\vec{k}^{(ij)}$

$$\begin{aligned} -2M(\omega_2 - \omega_3 - \omega_4) &= (k^{(2)} + k^{(3)} + k^{(4)})^2 = \\ &= 2(-\omega_2\omega_3(1 + \hat{k}^{(2)}\hat{k}^{(3)}) + \omega_4(-\omega_2(1 + \hat{k}^{(2)}\hat{k}^{(4)}) + \\ &\quad + \omega_3(1 - \hat{k}^{(3)}\hat{k}^{(4)}))) \end{aligned} \quad (1-10)$$

Auflösen nach ω_4 ergibt

$$\omega_4 = \frac{M(\omega_2 - \omega_3) - \omega_2\omega_3(1 + \hat{k}^{(2)}\hat{k}^{(3)})}{M + \omega_2(1 + \hat{k}^{(2)}\hat{k}^{(4)}) - \omega_3(1 - \hat{k}^{(3)}\hat{k}^{(4)})} \quad (1-11)$$

Darin sind die Skalarprodukte $\hat{k}^{(ij)} \cdot \hat{k}^{(el)}$ die Kosinus der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{k}^{(ij)}$ und $\vec{k}^{(el)}$. In dem speziellen Koordinatensystem der Abbildung 1 lautet 1-11 explizit (vgl. (14))

$$\begin{aligned} \omega_4 &= \frac{M(\omega_2 - \omega_3) - \omega_2\omega_3(1 - \cos\vartheta_2)}{M + \omega_2(1 - \cos\vartheta_4) - \omega_3(1 - \cos\vartheta_3 \cos\vartheta_4 - \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \cos\varphi)} \quad (1-12) \\ &= \frac{M(\omega_2 - \omega_3) - 2\omega_2\omega_3 \sin^2 \frac{\vartheta_2}{2}}{M + 2\omega_2 \sin^2 \frac{\vartheta_4}{2} - \omega_3 \left(\sin^2 \left(\frac{\vartheta_3 + \vartheta_4}{2} \right) - \sin\vartheta_3 \sin\vartheta_4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Im statischen Grenzfall $M \rightarrow \infty$ vereinfacht sich 1-12 zu der bekannten Aussage, daß keine Energie auf das elektromagnetische Potential übertragen wird:

$$\omega_4 = \omega_2 - \omega_3 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\omega = 0 \quad . \quad (1-13)$$

Gleichung 1-11 enthält implizit die Information über diejenigen Konfigurationen, bei denen die Photonspaltung kinematisch nicht möglich ist. Das ist dann der Fall, wenn nicht alle Relationen 1-8 gleichzeitig physikalisch erfüllt werden können, und drückt sich in Gleichung 1-11 dadurch aus, daß $\omega_4 \leq 0$ würde. Praktisch ist der kinematisch verbotene Bereich von geringem Interesse, da er bei großen Streuwinkeln liegt, wo die Wirkungsquerschnitte längst unmeßbar klein geworden sind. Bei der Ausführung der numerischen Integration über den Raumwinkel eines der gestreuten Photonen muß er jedoch zur Vermeidung technischer Probleme berücksichtigt werden. Eine ausführlichere Betrachtung der kinematisch verbotenen Bereiche erfolgte in (6).

Zur späteren Verwendung bei der Formulierung des Streumatrixelementes seien hier einige dimensionslose, relativistisch invariante Parameter als Abkürzungen für Skalarprodukte definiert. Die Energieskala wird durch die Masse m des in der geschlossenen Schleife umlaufenden Elektrons gegeben; die Streuwinkel wurden in Abbildung 1 festgelegt.

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2m^2} k^{(3)} k^{(4)} = \frac{1}{4m^2} (k^{(1)} + k^{(2)})^2 = \\ &= \frac{\omega_2 \omega_4}{m^2} \left(\sin^2 \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2} - \sin \alpha_3^0 \sin \alpha_4^0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right), \\ S &= \frac{1}{2m^2} k^{(2)} k^{(4)} = \frac{1}{4m^2} (k^{(1)} + k^{(3)})^2 = -\frac{\omega_2 \omega_4}{m^2} \sin^2 \frac{\alpha_4^0}{2}, \\ t &= \frac{1}{2m^2} k^{(2)} k^{(3)} = \frac{1}{4m^2} (k^{(1)} + k^{(4)})^2 = -\frac{\omega_2 \omega_3}{m^2} \sin^2 \frac{\alpha_2^0}{2}, \end{aligned}$$

$$\mu = - \frac{1}{4m^2} k^{(1)2} = -r - s - t, \quad (1-14)$$

$$r_i = \frac{1}{2m^2} k^{(1)} k^{(2)} = r + \mu = -s - t,$$

$$s_i = \frac{1}{2m^2} k^{(1)} k^{(3)} = s + \mu = -r - t,$$

$$t_i = \frac{1}{2m^2} k^{(1)} k^{(4)} = t + \mu = -r - s.$$

Wegen Gleichung 1-9 läßt sich das Quadrat des Energie-Impuls-Übertrages μ durch die Energie-Übertragung $\Delta\omega$ ausdrücken gemäß

$$\mu = \frac{M}{2m^2} \Delta\omega. \quad (1-15)$$

Im kinematischen Bereich der Spaltung des Photons 2 in die Photonen 3 und 4 (r-Kanal) gilt ersichtlich immer

$$r, \mu, r_i \geq 0 \quad \text{und} \quad s, t \leq 0. \quad (1-16)$$

Hingegen kann das Vorzeichen von s_1 und t_1 wechseln.

Abschließend noch einige kurze Bemerkungen zur Beschreibung der Polarisierung der Photonen. Es ist zur Formulierung der Wirkungsquerschnitte formal einfacher, eine zirkuläre Polarisationsbasis zu wählen. Die auslaufenden Photonen 3 und 4 können in einer gemeinsamen Polarisationsbasis mit

$$u^\lambda k^{(3)} = u^\lambda k^{(4)} = u^+ u^- = u^{\lambda 2} = 0, \lambda = +, - \quad (1-17)$$

beschrieben werden. In Anlehnung an (15) beschreiben die Vektoren

$$\begin{aligned} u_{\nu}^{\lambda_j} &= \frac{1}{4\sqrt{2}rst} (\chi_{\nu} + i\lambda_j K_{\nu}) , \quad j=3,4, \lambda_j = \pm 1, \\ \chi^{\nu} &= \frac{1}{m^3} \varepsilon^{\nu\varrho\sigma\tau} k_{\varrho}^{(1)} k_{\sigma}^{(2)} k_{\tau}^{(3)} , \\ K_{\nu} &= -\frac{2}{m} (rk_{\nu}^{(1)} + t_k k_{\nu}^{(3)} + s_k k_{\nu}^{(4)}) \end{aligned} \quad (1-18)$$

rechtshändig zirkular polarisierte Photonen 3 und 4 für $\lambda_3 = +1$, $\lambda_4 = -1$ und linkshändig zirkular polarisierte Photonen für $\lambda_3 = -1$ und $\lambda_4 = +1$ ($\varepsilon^{\nu\varrho\sigma\tau}$ ist der total antisymmetrische Tensor vierter Stufe mit $\varepsilon^{0123} = 1$). Für das einlaufende Photon 2 beschreiben

$$\begin{aligned} u_{\nu}^{\lambda_2} &= \frac{1}{4\sqrt{2}rst} (\chi_{\nu} + i\lambda_2 K'_{\nu}) , \quad \lambda_2 = \pm 1, \\ K'_{\nu} &= \frac{2}{m} (tk_{\nu}^{(1)} - (s_i + \frac{2\mu t}{r_i})k_{\nu}^{(2)} + r_i k_{\nu}^{(3)}) \end{aligned} \quad (1-19)$$

rechtshändig zirkulare Polarisation für $\lambda_2 = +1$ und linkshändige für $\lambda_2 = -1$.

2. Der differentielle Wirkungsquerschnitt τ

2.1 Analytische Darstellung des differentiellen Wirkungsquerschnitts τ

Der exakte analytische Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt τ der Photenspaltung in niedrigster störungstheoretischer Ordnung wurde zuerst von Shima (16) berechnet. Der Autor benutzte die Feynman-Parametrisierung, um die aus den Diagrammen der Figur 1-3 herrührenden Integrale über Spuren der Form

$$\frac{1}{\pi^2} \int \text{Tr} \left(\gamma_\mu (p - m)^{-1} \gamma_\nu (p - k^{(2)} - m)^{-1} \gamma_\sigma \right. \\ \left. \times (p + k^{(1)} + k^{(3)} - m)^{-1} \gamma_\rho (p + k^{(1)} - m)^{-1} \right) d^4 p \quad (2-1)$$

auszuwerten. Später fanden Costantini, de Tollis und Pistoni (15) mit doppelten Dispersionsrelationen (Mandelstam-Darstellung) einen allgemeinen analytischen Ausdruck für den Vakuumpolarisationstensor vierter Ordnung, wobei bis zu zwei Photonen nicht auf der Massenschale zu liegen brauchen. Sie wandten ihr Ergebnis unter anderem auf die Photenspaltung an und reproduzierten die Resultate von Shima. In beiden Arbeiten wird umfangreich von den Symmetrieeigenschaften des Vakuumpolarisationstensors Gebrauch gemacht, die sich aus der relativistischen Invarianz, der Kreuzungssymmetrie und der Eichinvarianz ergeben. Dieses Vorgehen wurde zum erstenmal von Karplus und Neumann (17) bei der Berechnung der niedrigsten Ordnung der Photon-Photon-Streuung angewandt und wird in den genannten Arbeiten ausführlich beschrieben. Es hat neben einer erheblichen Vereinfachung der Rechnung

den besonderen Vorteil, daß alle Größen eichinvariant durch nicht divergente Integrale ausgedrückt werden, während bei anderem Vorgehen 2-1 logarithmisch divergente Integrale liefern kann, deren Koeffizient nach Summation aller Diagramme jedoch verschwindet (12).

Das Matrixelement M der Photenspaltung für Photonen der zirkulären Polarisation $\lambda_j = \pm$ ($j = 2, 3, 4$) läßt sich darstellen als.

$$M^{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \frac{1}{\mu} \Gamma^\nu G_\nu^{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}. \quad (2-2)$$

Dabei beschreibt G_ν den Anteil des Vakuumpolarisationstensors, Γ^ν den Anteil des Kernes an der Streuung, und $\frac{1}{\mu}$ ist der Photonenpropagator, der die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen beiden vermittelt. Der Anteil der Vakuumpolarisation läßt sich aufgrund der oben angeführten Symmetrieeigenschaften zerlegen in

$$\begin{aligned} G_\nu^{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(1, 2, 3, 4) = & \frac{1}{4\sqrt{2}rst} \left(E_{(1)}^{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(1, 2, 3, 4) N_\nu(1, 2, 3, 4) \right. \\ & - E_{(1)}^{\lambda_2 \lambda_4 \lambda_3}(1, 2, 4, 3) N_\nu(1, 2, 4, 3) \\ & \left. + E_{(2)}^{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(1, 2, 3, 4) \chi_\nu(1, 2, 3, 4) \right). \end{aligned} \quad (2-3)$$

Dabei bedeuten die Zahlen j in den Argumenten eine abkürzende Schreibweise für die Photonenimpulse $k^{(j)}$. Die Vektorgröße χ_ν wurde in Gleichung 1-18 definiert, N_ν ist gegeben durch

$$N_\nu(1, 2, 3, 4) = \frac{i}{m} \left(k_\nu^{(3)} - \frac{k^{(1)} \cdot k^{(2)}}{k^{(1)} \cdot k^{(2)}} k_\nu^{(2)} \right) = \frac{i}{m} \left(k_\nu^{(3)} - \frac{t_i}{r_i} k_\nu^{(2)} \right). \quad (2-4)$$

Von den 16 Amplitudenfunktionen $E_{(n)}$ sind nur acht unabhängig, da gilt (15)

$$\begin{aligned} E_{(1)}^{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} &= - E_{(1)}^{-\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4} , \\ E_{(2)}^{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} &= + E_{(2)}^{-\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4} . \end{aligned} \quad (2-5)$$

Die Invarianz der S-Matrix unter Paritätstransformation, Zeitumkehr und Vertauschung der beiden Photonen im Endzustand erlaubt die Herleitung zusätzlicher Symmetrieeigenschaften für G_v (15). Explizit lassen sich damit vier der G_v für zirkuläre Polarisation der freien Photonen durch bloßes Vertauschen von Argumenten gewinnen

$$\begin{aligned} G_v^{+-+}(1,2,3,4) &= - G_v^{---}(1,4,3,2) , \\ G_v^{-+-}(1,2,3,4) &= - G_v^{+++}(1,4,3,2) , \\ G_v^{+--}(1,2,3,4) &= - G_v^{---}(1,3,2,4) , \\ G_v^{--+}(1,2,3,4) &= - G_v^{+++}(1,3,2,4) . \end{aligned} \quad (2-6)$$

Die restlichen vier Polarisationskombinationen kann man durch nur vier der Amplitudenfunktionen, nämlich $E_{(1)}^{+++}$, $E_{(1)}^{--+}$, $E_{(2)}^{+++}$, $E_{(2)}^{--+}$, ausdrücken gemäß

$$\begin{aligned} G_v^{+++} &= \frac{1}{4\sqrt{2}rst} \left(+ E_{(1)}^{+++} N_v - (3 \leftrightarrow 4) + E_{(2)}^{+++} X_v \right) , \\ G_v^{--+} &= \quad \quad \left(- \quad \quad + \quad \quad + \quad \quad \right) \end{aligned} \quad (2-7)$$

und

$$G_v^{+-} = \frac{1}{4\sqrt{2rst}} \left(-E_{(1)}^{+-} N_v + (3 \leftrightarrow 4) + E_{(2)}^{+-} X_v \right),$$

$$G_v^{-++} = \quad \quad \quad \left(+ \quad \quad - \quad \quad + \quad \quad \right)^{(2-8)}.$$

Die vier noch verbleibenden Amplitudenfunktionen E sind im Anhang / wiedergegeben. Sie setzen sich zusammen aus rationalen Ausdrücken der invarianten Parameter r, s, t, μ und transzendenten Funktionen B, T, I derselben Parameter. Die transzendenten Funktionen enthalten Logarithmen und Dilogarithmen (Spence-Funktionen) und sind im Anhang 2 dargestellt.

Der Anteil des Kerns an der Streuung wird durch die Vertexfunktion Γ_v beschrieben. Im Fall statischer Streuung an einem Coulomb-Feld wäre einfach

$$\Gamma = (1, 0, 0, 0). \quad (2-9)$$

Wir wollen hier sowohl Rückstoß- als auch Formfaktoreffekte einschließen und für den Kern einen verallgemeinerten skalaren Ansatz wählen

$$\Gamma_v = \frac{F(\mu)}{2\sqrt{EE'}} (P + P')_v. \quad (2-10)$$

E und E' bedeuten hier die Energien des Kerns vor ($E = M$ im Laborsystem) und nach dem Stoß, P und P' seine Impulse (vgl. 1-7), und F ist ein relativistisch invarianter Formfaktor, der nur vom Quadrat des Energie-Impuls-Übertrages abhängt. Da im Laborsystem

$$P = \begin{pmatrix} M \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad P' = P + k^{(1)}, \quad E' = M + \Delta\omega \quad (2-11)$$

gelten, vereinfachen sich dort Skalarprodukte von Γ mit einem beliebigen Vierervektor x zu

$$\Gamma_\nu x^\nu = \frac{F(\mu)}{\sqrt{1 + \frac{\Delta\omega}{M}}} x_0 + \frac{F(\mu)}{2\sqrt{M(M+\Delta\omega)}} k_\nu^{(1)} x^\nu. \quad (2-12)$$

Wegen der Gestalt 2-3 von G_ν treten im Matricelement 2-2 nur Produkte von Γ_ν mit N_ν und X_ν auf. In beiden Fällen sieht man leicht, daß

$$k_\nu^{(1)} N^\nu = k_\nu^{(1)} X^\nu = 0 \quad (2-13)$$

erfüllt ist. Damit läßt sich im Laborsystem das Matricelement 2-2 für den Ansatz 2-10 einfach durch das Matricelement G_0 für den statischen Fall 2-9 ausdrücken

$$M^{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \frac{F(\mu)}{\mu \sqrt{1 + \frac{\Delta\omega}{M}}} G_0^{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}. \quad (2-14)$$

Die Berücksichtigung des Rückstoßes drückt sich in 2-14 außer durch den $\Delta\omega$ -abhängigen Vorfaktor auch noch implizit in den Werten der Argumente von G_0 aus. Erwartungsgemäß ergibt sich bei numerischer Auswertung des differentiellen Wirkungsquerschnitts τ , daß die statische Näherung ausgezeichnet ist, solange $\Delta\omega \ll M$ bleibt.

Wegen des Propagators für das virtuelle Photon $k^{(1)}$ wird der differentielle Wirkungsquerschnitt τ der Photospaltung in niedrigster störungstheoretischer Ordnung für große Quadrate des Energie-Impuls-Überschusses $k^{(1)}$ stark unterdrückt. Im Formfaktor $F(\mu)$

sind daher Effekte, die sich erst bei großen μ , d.h. kleinen Stoßparametern bemerkbar machen, nur von geringem Interesse. Solche Effekte, die wir hier nicht berücksichtigen wollen, sind etwa Ausdehnung des Kerns, Resonanzen und andere Auswirkungen der Struktur des Kerns, Korrekturen aufgrund der starken Wechselwirkung, sowie Formfaktor-Effekte infolge der Strahlungskorrekturen in höherer Ordnung der Quantenelektrodynamik. Hingegen macht sich die Abschirmung des Kernfeldes durch die Hüllenelektronen bei großen Stoßparametern bemerkbar, d.h. bei kleinen Werten von μ . Sie muß daher in die Betrachtung des Wirkungsquerschnitts einbezogen werden.

Die genauesten Ergebnisse für das abgeschirmte Coulomb-Feld eines neutralen Atoms liefert das Verfahren der selbstkonsistenten Felder nach Hartree und Fock (18). Byatt (19) hat für die Hartree-Potentiale eine einfache analytische Näherung angegeben, worin der Formfaktor im Ortsraum durch eine Summe von Exponentialfunktionen (Wentzel-Potentiale) ausgedrückt wird. Als Funktion der Thomas-Fermi-Variablen

$$\chi = \left(\frac{2^7}{(3\pi)^2} Z \right)^{1/3} \frac{r}{a_0} \quad (2-15)$$

(hier bedeutet r den Abstand vom Zentrum, a_0 den Bohr-Radius von Wasserstoff) läßt sich der Formfaktor darstellen als

$$F(\chi) = \sum_{n=1}^k c_n e^{-b_n \chi} \quad \text{mit} \quad \sum_{n=1}^k c_n = 1, \quad (2-16)$$

wo die $c_n(Z)$ und $b_n(Z)$ für jedes Z geeignet anzupassen sind. Für mittlere und hohe Kernladungs-

zahlen Z hat die Darstellung 2-16 mit der Z -abhängigen Variablen x den Vorteil, daß man $F(x)$ dann pauschal in guter Näherung durch Fitkonstanten wiedergeben kann, die nicht mehr von der Kernladungszahl Z abhängen. Wir wählen hier die von Byatt (19) für Quecksilber angegebenen Werte

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.19 \quad , \quad c_2 = 0.56 \quad , \quad c_3 = 0.25 \quad , \\ b_1 &= 0.257 \quad , \quad b_2 = 0.779 \quad , \quad b_3 = 3.16 \quad . \end{aligned} \quad (2-17)$$

Der entsprechende relativistische Formfaktor im Impulsraum hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \mu \sum_{n=1}^3 \frac{c_n}{\mu + \hat{b}_n^2} \quad , \quad \text{wo} \\ \hat{b}_n &= \left(\frac{2^4}{(3\pi)^2} Z \right)^{1/3} \alpha b_n \approx 0.565 \alpha Z^{1/3} b_n . \end{aligned} \quad (2-18)$$

Einigen anfänglichen numerischen Berechnungen wurde ein von Mott und Massey (20) vorgeschlagenes einfacheres Abschirmmodell zugrundegelegt. Es pauschalisiert mit nur einem Exponentialterm das abgeschirmte Potential des statistischen Thomas-Fermi-Modells (21). Es wird charakterisiert durch die Konstanten

$$c_1' = 1 \quad , \quad b_1' = 0.66 \quad , \quad (2-19)$$

und den entsprechenden Formfaktor im Impulsraum

$$F(\mu) = \frac{\mu}{\mu + \hat{b}_1'^2} \quad . \quad (2-20)$$

Es ergibt grundsätzlich eine schwächere Abschirmung als das Modell 2-18 und weicht bei etwa $\mu \approx 0.03$ am

stärksten von diesem nach unten ab. Für alle Berechnungen, bei denen die Abschirmung einen wesentlichen Einfluß auf das Ergebnis hat, wurde das Modell 2-18 zugrunde gelegt. Die unterschiedlichen Auswirkungen der beiden Modelle werden in Abschnitt 3.2 in Tabelle 2 an einigen Beispielen illustriert.

Mit den Matrixelementen aus 2-14 und den Abkürzungen

$$V = \frac{Z^2 \alpha^3 r_0^2}{(2\pi)^4 16 m^2} ,$$

$$Q = \frac{d\omega_4}{d(\omega_4 + \Delta\omega)} = \frac{M^2 \omega_2 \omega_4}{|(K^{(2)}P)(K^{(4)}P)|} = \quad (2-21)$$

$$= \frac{M \omega_4}{(M \omega_4 - 2 m^2 t_1)} ,$$

wo r_0 der klassische Elektronenradius ist, läßt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt τ für unpolarisierte Photonen im Anfangs- und Endzustand schreiben als

$$\tau(\omega_2, g, \lambda_3^0, \lambda_4^0, \varphi) = \frac{d^3\sigma}{d\omega_3 d\Omega_3 d\Omega_4} =$$

$$= VQ \frac{\omega_3 \omega_4}{\omega_2} \frac{1}{2} \sum_{\lambda_i=\pm} |M^{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}|^2 . \quad (2-22)$$

Außer von den angegebenen Größen ($g = \frac{\omega_3}{\omega_2}$ ist das Energieaufspaltungsverhältnis) hängt dieser Ausdruck noch von Masse M und Kernladungszahl Z des Kerns ab.

2.2 Streuung eines Photons in Vorwärtsrichtung

Für einige spezielle kinematische Konfigurationen eignen sich die Formen 2-7 und 2-8 der Ausdrücke G_v , nicht direkt zur numerischen Auswertung, nämlich wenn in den Amplitudenfunktionen E sich gegenseitig kompensierende (Schein-) Singularitäten auftreten. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn ein Photon in Vorwärtsrichtung ausläuft - wir wählen für diese Betrachtung das Photon mit dem Index 3 - und Scheinsingularitäten wegen $t = 0$ vorkommen. Der zugehörige Grenzübergang wurde von Schneider (5) betrachtet, jedoch sind dessen Aussagen über die Amplitudenfunktionen $E_{(1)}$ falsch. Im folgenden soll die korrekte Ableitung des Wirkungsquerschnitts τ im Grenzfall $\sqrt{s} \rightarrow 0$ wiedergegeben werden.

Die kinematischen Variablen aus 1-14 vereinfachen sich für $\sqrt{s} = 0$ gemäß

$$\begin{aligned} r &= \frac{\omega_3 \omega_4}{m^2} \sin^2 \frac{\sqrt{s}}{2} , \\ S &= -\frac{\omega_3 \omega_4}{m^2} \sin^2 \frac{\sqrt{s}}{2} = -\frac{\omega_3}{\omega_2} r , \\ t &= 0 , \\ \mu &= \frac{\omega_4 (\omega_2 - \omega_3)}{m^2} \sin^2 \frac{\sqrt{s}}{2} . \end{aligned} \tag{2-23}$$

In Vorwärtsrichtung beider Photonen, wenn auch $\sqrt{s}$ null wird, verschwindet der differentielle Wirkungsquerschnitt τ , wie bereits im Abschnitt 1.2 erwähnt wurde.

Um den Grenzwert $\sqrt{s} \rightarrow 0$ der Amplitudenfunktionen E aus Anhang 1 zu berechnen, müssen die Entwicklungen der transzendenten Funktionen B , T , I aus Anhang 2 für kleine Werte von t herangezogen werden. Diese Ersetzungen führen zu umfangreichen rationalen Ausdrücken, die mit dem in Anhang 4 beschriebenen Programm COMRAT berechnet wurden. Mit COMRAT wurden auch die Umformungen durchgeführt, die zur expliziten Kompensation aller Terme führen, die einen Faktor t im Nenner enthalten, und der Grenzfall $t = 0$ ausgewertet. Für jede der vier Amplitudenfunktionen E sind drei solcher Grenzfälle zu betrachten, je nachdem, welches der drei Argumente mit t identifiziert wird. Die Ergebnisse dieser zwölf Grenzbetrachtungen für die Amplitudenfunktionen E finden sich in Anhang 1. Sie stimmen für die Amplitudenfunktionen $E_{(2)}$ mit den von Schneider (5) angegebenen Resultaten überein. Es ergeben sich einfache Zusammenhänge zwischen den nichtverschwindenden Amplitudenfunktionen $E_{(1)}$ und $E_{(2)}$ für $t = 0$, nämlich

$$\begin{aligned} E_{(1)}^{+++}(r, s, t=0) &= -2s E_{(2)}^{+++}(r, s, t=0) , \\ E_{(1)}^{--+}(r, s, t=0) &= +2s E_{(2)}^{--+}(r, s, t=0) . \end{aligned} \quad (2-24)$$

Außer den Amplitudenfunktionen E weisen in 2-8 auch die von der Polarisationsbasis herrührenden Terme

$$\frac{N_v}{\sqrt{rst}} \quad \text{und} \quad \frac{X_v}{\sqrt{rst}} \quad (2-25)$$

eine Scheinsingularität auf. Wegen 2-12 bis 2-14 brauchen nur die Komponenten N_0 und X_0 betrachtet zu werden. Mit den in 2-4 und 1-18 gegebenen Definitionen findet man

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_3 \rightarrow 0} \frac{N_0(1,2,3,4)}{\sqrt{rst}} &= -\frac{2i}{s} \cot \frac{\lambda_4}{2} \cos \varphi, \\ \lim_{\lambda_3 \rightarrow 0} \frac{X_0(1,2,3,4)}{\sqrt{rst}} &= 4 \cot \frac{\lambda_4}{2} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2-26)$$

Beim Ausführen des Grenzübergangs muß natürlich darauf geachtet werden, daß für r noch der λ_3 -abhängige Ausdruck 1-14 und nicht die Form 2-23 zu verwenden ist. Zusammengefaßt erhält man nach Einsetzen in 2-6 bis 2-8 die Gleichungen

$$\begin{aligned} G_0^{+++}(r,s,t=0) &= \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \cot \frac{\lambda_4}{2} E_{(2)}^{+++}(r,s,t=0), \\ G_0^{---}(r,s,t=0) &= \frac{-i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \cot \frac{\lambda_4}{2} E_{(2)}^{+++}(r,s,t=0), \\ G_0^{+-}(r,s,t=0) &= \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \cot \frac{\lambda_4}{2} E_{(2)}^{++}(r,s,t=0), \\ G_0^{-+}(r,s,t=0) &= \frac{-i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \cot \frac{\lambda_4}{2} E_{(2)}^{++}(r,s,t=0), \\ G_0^{--}(r,s,t=0) &= \frac{-i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \cot \frac{\lambda_4}{2} E_{(2)}^{++}(s,r,t=0), \\ G_0^{++}(r,s,t=0) &= \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} \cot \frac{\lambda_4}{2} E_{(2)}^{++}(s,r,t=0), \\ G_0^{+-}(r,s,t=0) &= G_0^{-+}(r,s,t=0) = 0. \end{aligned}$$

Physikalisch ist darin bemerkenswert, daß von den beiden Amplitudenpaaren, bei denen das in Vorwärtsrichtung auslaufende Photon 3 eine Spinumklappung gegenüber dem einlaufenden Photon 2 erleidet, nur dasjenige Paar verschwindet, worin das Photon 4 denselben Spin hat wie das Photon 2, also die letzten beiden Amplituden in 2-27. Das Amplitudenpaar $G_{\circ}^{+-}$ und $G_{\circ}^{-++}$ verschwindet hingegen nicht. Eine Änderung des Gesamtspins um eine Einheit ist demnach in Vorwärtsrichtung des Photons 3 nur dann erlaubt, wenn dieses Photon denselben Spin hat wie das einlaufende Photon 2. Eine Änderung des Gesamtspins um drei Einheiten ist demgegenüber für alle vier dabei möglichen Kombinationen der Spins erlaubt.

Erwartungsgemäß hängt nach Bildung der Betragsquadrate der differentiellen Wirkungsquerschnitt σ in der Vorwärtsrichtung $\sigma_3 = 0$ nicht mehr von φ ab, da φ in 2-27 nur als Phasenfaktor auftritt. Der Prozeß ist für ein in Vorwärtsrichtung auslaufendes Photon 3 selbstverständlich symmetrisch bezüglich Drehungen um die Einfallssachse.

2.3 Numerische Resultate zum differentiellen Wirkungsquerschnitt τ

Ausführliche numerische Berechnungen zu koplanaren Konfigurationen der Photonspaltung (alle drei freien Photonen in einer Ebene, d.h. $\varphi = \pi$) wurden bereits von Schneider (5) und Steinhöfer (6) durchgeführt. Hier sollen vor allem Aussagen zum Verlauf des differentiellen Wirkungsquerschnitts τ vorgelegt werden, soweit sie für das Vorgehen bei der späteren Raumwinkel-Integration über das Streuphoton 4 von Bedeutung sind. Vornehmlich interessieren uns dabei das bisher noch nicht untersuchte Verhalten der nichtkoplanaren Streuung ($0 \neq \varphi \neq \pi$, vgl. Abbildung 1) und die Lage von Peaks im Integrationsgebiet.

In den beiden nachfolgenden Abbildungen 2 und 3 sind zu diesem Zweck für zwei repräsentative kinematische Konfigurationen die beiden Grenzfälle $\varphi = \pi$ und $\varphi = 0$ graphisch dargestellt. Der Streuwinkel des festgehaltenen Photons 3 wurde in beiden Abbildungen zu $\vartheta_3 = 1 \text{ mrad}$ gewählt. Für andere ϑ_3 erhält man ganz ähnliche Figuren, nur verschiebt sich ihre Lage bezüglich der Achsen. Für größere ϑ_3 beispielsweise verschieben sich die Kurven zu größeren ϑ_4 hin, und ihre Höhe nimmt ab, und zwar in beiden Abbildungen so, daß das Integral über die Kurven kleiner wird.

In der Abbildung 2 werden die Verhältnisse für kleinere Einschußenergien ω_2 und große Werte von β illustriert. Beiden Kurven für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ gemeinsam ist das Vorhandensein eines Knicks an der Schwelle zur reellen Elektron-Positron-Paarerzeugung, die mathematisch durch $r = 1$ charakterisiert wird. Der differen-

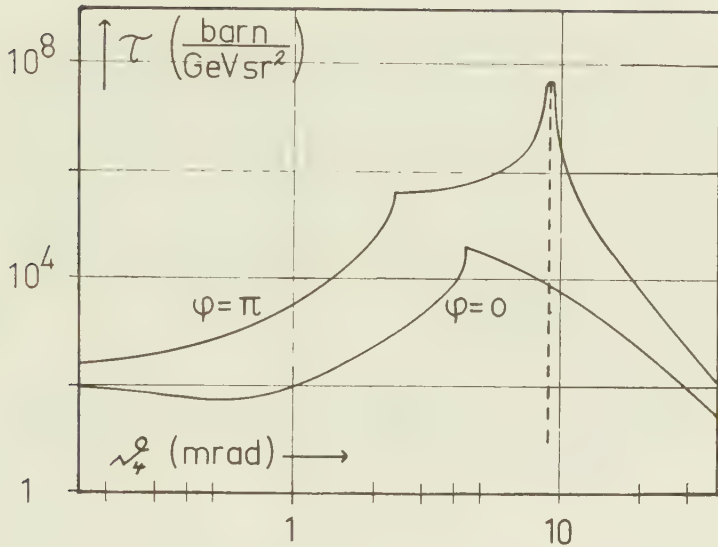


Abbildung 2

Differentielle Wirkungsquerschnitte der Photonspaltung an Gold für die Einschussenergie $\omega_2 = 1$ GeV, das Energieaufspaltungsverhältnis $\beta = 0.9$, den Streuwinkel $\vartheta_3 = 1$ mrad und die beiden Polarwinkel $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$. Die gestrichelte Linie an der Kurve für $\varphi = \pi$ deutet den Einschnitt im Doppelpeak für minimale μ an.

tielle Wirkungsquerschnitt γ ist an der Schwelle nicht differenzierbar, sondern weist von links eine unendliche Steigung auf, während die Steigung von rechts endlich bleibt (analog dem Verhalten der Funktionen $B(x)$ und $T(x)$ an der Stelle $x = 1$, vgl. Anhang 2). Während jedoch die Kurve für $\varphi = 0$ wie alle Kurven, wo φ nicht sehr nahe an π ist, nach der Schwellenspitze abfällt, steigt die Kurve für $\varphi = \pi$ zu größeren $\sqrt[2]{4}$ hin weiter an und hat schließlich nahe bei $\sqrt[2]{4} = 10$ mrad einen Peak.

Der genaue Ort des Peaks ist durch das Verschwinden des transversalen Impulsübertrags festgelegt, also durch die Bedingung

$$\omega_4 \sin \sqrt[2]{4} = \omega_3 \sin \sqrt[2]{3} . \quad (2-28)$$

Für kleine Winkel ergibt dies angenähert (da die statische Näherung $\omega_4 \approx (1-\vartheta)\omega_2$ dort sehr gut ist)

$$\sqrt[2]{4} \approx \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \sqrt[2]{3} . \quad (2-29)$$

Der Peak an dieser Stelle ist natürlich ein Effekt des Photonenpropagators in 2-14, da der Impulsübertrag μ dort sehr klein wird, wo der transversale Impulsübertrag verschwindet. Gleichzeitig geht jedoch mit $\mu \rightarrow 0$ auch das Matricelement G_0^{121314} in 2-14 gegen null, und zwar stärker als μ . Dies verkompliziert die Struktur des Peaks an der Stelle 2-28: er hat in der Mitte einen sehr schmalen, sehr tiefen Einschnitt, der in der Abbildung 2 durch die gestrichelte Linie nur angedeutet werden konnte. Denn die Breite des Einschnitts beträgt in $\sqrt[2]{4}$ -Richtung weniger als 0.01 mrad, die Tiefe hingegen etwa sieben

Größenordnungen. Natürlich ist diese Struktur experimentell nicht mehr auflösbar und wird zudem sicherlich von den höheren störungstheoretischen Ordnungen aufgefüllt. Der Doppelpeak selber dürfte dagegen die ideale Konfiguration sein, um den differentiellen Wirkungsquerschnitt τ der Photonspaltung direkt zu messen. Die Breite des Doppelpeaks in φ_4 -Richtung ist aus der Zeichnung ersichtlich; in φ -Richtung ist er nach $\Delta\varphi \approx 100 \text{ mrad}$ so gut wie völlig abgeklungen. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß ein solcher Propagatorpeak in den höheren Ordnungen der Photonspaltung in $Z\alpha$ nicht mehr auftreten dürfte und daher wahrscheinlich eine charakteristische Eigenschaft der niedrigsten Ordnung der Photonspaltung in $Z\alpha$ darstellt.

Für $\varphi_4 \rightarrow 0$ ist der Wert von τ , wie im vorigen Abschnitt hergeleitet, natürlich nicht von φ abhängig. Für große φ_4 verhalten sich beide Kurven in Abbildung 2 sehr ähnlich und fallen steil, nämlich stärker als $\sin^{-5} \frac{\varphi_4}{2}$ ab. In φ -Richtung verläuft τ , mit Ausnahme eines schmalen Streifens um $\varphi = \pi$ in der Nähe des Doppelpeaks, flach und glatt und fällt zu $\varphi = 0$ hin langsam ab, wie man es aus rein kinematischen Überlegungen natürlich erwartet.

Für die numerische Integration ergeben sich aus diesem Verhalten von τ einige Konsequenzen. Der Hauptbeitrag zum Integral kommt von einem schmalen Streifen um $\varphi = \pi$, wo τ groß ist. Insbesondere trägt der Doppelpeak bei minimalem μ wegen seiner Höhe erheblich bei. Er muß infolge seiner Steilheit bei der Integration sehr fein aufgelöst werden, um den numerischen Integrationsfehler klein zu halten. Das restliche Gebiet kleiner φ_4 bietet bei der Integration

keinerlei prinzipielle Probleme und kann mit einer größeren Unterteilung der Achsen numerisch integriert werden. Von großen Streuwinkeln $\sqrt[4]{\epsilon}$ kommt wegen des steilen Abfalls von τ kein nennenswerter Beitrag und es genügt, diesen Beitrag ab einem bestimmten $\sqrt[4]{\epsilon}$ grob abzuschätzen, hauptsächlich um sich zu überzeugen, daß man die obere Integrationsgrenze von $\sqrt[4]{\epsilon}$ wirklich so gewählt hat, daß dieser Beitrag völlig vernachlässigbar ist.

In der Abbildung 3 werden die Verhältnisse für höhere Einschußenergien ω_2 und kleine Werte des Energieaufspaltungsverhältnisses $\vartheta = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ illustriert. Hier tritt der Schwellenknicke in der Kurve $\varphi = \pi$ nicht mehr auf, da r bereits in der Vorwärtsrichtung größer als eins ist und mit wachsendem $\sqrt[4]{\epsilon}$ zunimmt (vgl. hierzu die Definition von r in 1-14). Dagegen ist das $r = 1$ Schwellenverhalten von τ für die Struktur in der $\varphi = 0$ Kurve verantwortlich. Bei $\varphi = 0$ und $\sqrt[4]{\epsilon} = \sqrt[4]{\epsilon_0} - 1$ mrad ist nämlich $r = 0$ und r wächst von da aus in beiden $\sqrt[4]{\epsilon}$ -Richtungen an. An der reellen Paarerzeugungsschwelle, wo $r = 1$ wird, tritt wieder der nicht differenzierbare Knick auf. Die Schwelle ist in der Konfiguration von Abbildung 3 auf eine kleine Umgebung von $\varphi = 0$ beschränkt und macht sich nicht mehr wie in Abbildung 2 für alle φ bemerkbar.

Der Peak bei verschwindendem transversalen Impulsübertrag in der $\varphi = \pi$ Kurve liegt in dieser Konfiguration bei sehr kleinem $\sqrt[4]{\epsilon}$ und dürfte experimentell kaum mehr zugänglich sein. Allgemein kann man sagen, daß die Möglichkeit, die Photonspaltung zu messen, mit großen Energien (und kleinem ϑ) immer ungünstiger wird, da zwar die Maxima der Wirkungsquerschnitte ansteigen, aber gleichzeitig immer enger in die Vorwärts-

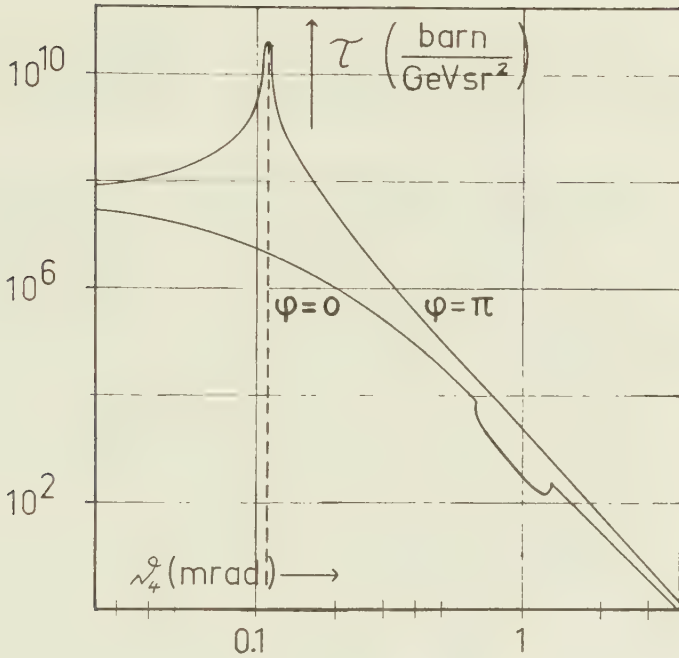


Abbildung 3

Differentielle Wirkungsquerschnitte der Photonspaltung an Gold für die Einschüßenergie $\omega_2 = 10 \text{ GeV}$, das Energieaufspaltungsverhältnis $\varrho = 0.1$, den Streuwinkel $\lambda_3^2 = 1 \text{ mrad}$ und die beiden Polarwinkel $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$. Die gestrichelte Linie an der Kurve für $\varphi = \pi$ deutet den Einschnitt im Doppelpeak für minimale μ an.

richtung rücken. Umgekehrt sind zu kleine Einschüßenergien ω_2 nicht günstig, da hier die Wirkungsquerschnitte überall klein bleiben.

Der Doppelpeak bei minimalem μ in Abbildung 3 ist in $\sqrt{4}$ -Richtung natürlich sehr viel schmaler geworden als in Abbildung 2. Auch der Einschnitt, der durch die gestrichelte Linie angedeutet wird, ist extremer und erreicht eine Tiefe von über zehn Größenordnungen. Die Breite der Doppelpeakstruktur in φ -Richtung ändert sich dagegen wenig, was das Vorgehen bei der numerischen Integration erleichtert. Abgesehen von den besprochenen Veränderungen, bleiben die Verhältnisse im übrigen dieselben, wie bei Abbildung 2.

Für die numerische Integration entnimmt man aus Abbildung 3 zusätzlich zu dem bisher schon gesagten, daß es notwendig ist, die Intervallunterteilung für jede neue Konfiguration der sich ändernden Lage und den sich ändernden Abmessungen des Doppelpeaks anzupassen. Ferner muß auch die obere Grenze der $\sqrt{4}$ -Integration, ab der kein nennenswerter Beitrag zum Integral mehr zustande kommt, den wechselnden Konfigurationen geeignet angepaßt werden.

3. Der teilintegrierte Wirkungsquerschnitt Σ

3.1 Vergleich mit bisher vorliegenden Aussagen

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der numerischen Integration über eines der beiden Spaltphotonen beschrieben. Wir bezeichnen mit dem Index 3 das Photon, dessen Impuls festgehalten wird, und mit dem Index 4 das Photon, über dessen Richtung integriert wird. Der teilintegrierte Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}\Sigma(\omega_2, \vartheta, \vartheta_3) &= \frac{d^2\sigma}{d\omega_3 d\Omega_3} = \int \tau d\Omega_4 = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \tau(\omega_2, \vartheta, \vartheta_3, \vartheta_4, \varphi) \sin \vartheta_4 d\varphi d\vartheta_4 = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \tau(\omega_2, \vartheta, \vartheta_3, \vartheta_4, \varphi) \sin \vartheta_4 d\varphi d\vartheta_4\end{aligned}\quad (3-1)$$

konnte durch umfangreiche Vorkehrungen bei der numerischen Integration größtenteils mit einem geschätzten Fehler von nur 0.3% auf dem 90%-Konfidenzniveau berechnet werden. Die hierzu getroffenen Maßnahmen sind ausführlich in Anhang 5 beschrieben.

Bisher liegen zwei experimentelle Arbeiten zur Photospaltung vor. Ein älteres Experiment von Adler und Cohen (8) mit einer Einschüßenergie von $\omega_2 = 1.1 \text{ MeV}$ lieferte keinen eindeutigen Aufschluß über Existenz und Wirkungsquerschnitt der Photon-

spaltung. Das zweite Experiment im Energiebereich zwischen 1 und 7 GeV am DESY (9) war vornehmlich der Messung der Delbrück-Streuung gewidmet. Das Hauptaugenmerk der Experimentatoren lag demnach bei der elastischen Streuung eines Photons an Targets aus schweren Kernen. Die gleichzeitig registrierten inelastischen Photonstreuereignisse wurden von den Autoren der Photonspaltung zugeschrieben, ohne daß das zweite Streuphoton nachgewiesen worden war. Die Auswertung der inelastischen Streuphotonen wurde außerdem dadurch erschwert, daß die Energie des einfallenden Photons wegen der Verwendung eines Bremsstrahlungsstrahls nicht festgelegt war. Dennoch behaupteten die Autoren, mit ihrer Messung die Photonspaltung nachgewiesen zu haben, und gaben Abschätzungen für den hier betrachteten teilintegrierten Wirkungsquerschnitt Σ an.

Diese Auswertung wurde von Baier et al. (10) kritisiert, die eine theoretische Abschätzung von Σ mit der Weizsäcker-Williams-Approximation vornahmen. Sie erhielten bei ihren numerischen Berechnungen um zwei Größenordnungen kleinere Werte, als die experimentelle Analyse geliefert hatte. Sie wiesen zur Erklärung der Diskrepanz auf den Prozeß der Elektron-Positron-Paarerzeugung mit Bremsstrahlung im elektrostatischen Feld eines Kernes hin. Dieser Prozeß erklärt die Größenordnung der gemessenen inelastisch gestreuten Photonen (vgl. Abschnitt 1.2) und wurde bei der experimentellen Auswertung nicht abgezogen.

Zur Klärung dieser offenen Kontroverse dient die nachfolgende Tabelle 1. Darin sind die Werte für Σ aus der exakten numerischen Berechnung dieser Arbeit, aus der Weizsäcker-Williams-Approximation in (10) und

aus der experimentellen Auswertung in (9) einander gegenübergestellt (die beiden letzteren sind aus graphischen Darstellungen entnommen).

Zunächst ist daraus offenkundig ersichtlich, daß auch die hier vorgelegten exakten Werte für Σ nichts an der Tatsache ändern, daß die Daten der experimentellen Auswertung um zwei Größenordnungen zu groß sind.

ω_2 (GeV)	ϑ_3 (mrad)	$\Sigma \left(\frac{\text{barn}}{\text{Gev sr}} \right)$		
		exakt	Ref. 10	Ref. 9
1.7	1.75	5.18	4.3	~ 300
	2.25	1.94	1.6	~ 150
	2.75	0.858	0.7	~ 60
3.4	1.75	0.714	0.6	~ 70
	2.25	0.255	0.21	~ 40
	2.75	0.110	0.095	~ 20
6.1	1.75	0.127	0.095	~ 20
	2.25	0.0487	0.038	~ 9
	2.75	0.0193	0.016	~ 5

Tabelle I

Vergleich der Werte für den teilintegrierten Wirkungsquerschnitt Σ der Photonspaltung an Gold bei verschiedenen Streuwinkeln ϑ_3 und Energien ω_2 aus der exakten numerischen Integration, der Weizsäcker-Williams-Approximation in (10) und der experimentellen Auswertung in (9).

Darüberhinaus scheinen diese weder das Energie- noch das Winkelverhalten der theoretischen Werte richtig wiederzuspiegeln. Das beweist den in Ref. 10 gezogenen Schluß, daß die beobachteten inelastisch gestreuten Photonen überwiegend nicht von der Photonspaltung herkommen, sondern von einem Prozeß, der eine Ordnung weniger in der Kopplungskonstante aufweist. Da die Proportionalität des gemessenen Wirkungsquerschnitts zum Quadrat der Kernladung Z experimentell verifiziert wurde, kommt dafür nur die Elektron-Positron-Paarerzeugung mit Bremsstrahlung im elektrostatischen Feld eines Korns in Frage.

Der experimentelle Nachweis der Photonspaltung ist demnach wegen des hohen inelastischen Ein-Photon-Untergrunds nur möglich, wenn beide gestreuten Photonen in Koinzidenz nachgewiesen werden. Selbstverständlich müssen dabei Zufallskoinzidenzen durch geeignete Maßnahmen genügend unterdrückt werden. Mit einer solchen experimentellen Anordnung ist bei ausreichenden Zählraten zunächst eine direkte Auswertung des differentiellen Wirkungsquerschnitts τ möglich. Das dürfte vor allem im kinematischen Bereich des Doppelpeaks für Konfigurationen mit minimalem μ durchführbar sein. In Bereichen, wo geringe Zählraten eine statistisch aussagekräftige Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts τ nicht mehr zulassen, ist der hier betrachtete teilintegrierte Wirkungsquerschnitt Σ nützlich, da er einen großen Teil dieser Ereignisse ebenfalls für einen Vergleich mit der Theorie nutzbar macht.

Eine weitere wichtige Information ergibt sich aus dem Vergleich der Weizsäcker-Williams-Approximation mit der vollständigen numerischen Integration. Es

zeigt sich, daß die Weizsäcker-Williams-Approximation für den Wirkungsquerschnitt Σ der Photonspaltung größenordnungsmäßig brauchbare Ergebnisse liefert, daß die Daten aber in der Regel um rund zwanzig Prozent zu klein sind. Der Fehler der Weizsäcker-Williams-Approximation beträgt im allgemeinen das doppelte dessen, was die Autoren in Ref. 10 angenommen haben. Leider ist das verwendete Formfaktormodell für die Abschirmung in Ref. 10 nicht wiedergegeben. Da jedoch der für die Berechnung der exakten Werte von Σ in Tabelle 1 benutzte Formfaktor 2-18, unter allen plausiblen Modellen die stärkste Abschirmung ergibt und die kleinsten Werte für Σ liefert, ist es so gut wie ausgeschlossen, daß die verbleibende Differenz auf die Behandlung der Abschirmung zurückzuführen ist. Hinzu kommt, daß bereits bei einem Streuwinkel von $\sqrt{3} = 3 \text{ mrad}$ die Abschirmung nur noch eine Reduzierung des Wirkungsquerschnitts Σ um maximal 6 % bewirkt. Die verbleibende Differenz zwischen exakten und genäherten Werten ist daher mit Sicherheit auf den Näherungsfehler der Weizsäcker-Williams-Approximation zurückzuführen.

3.2 Der Einfluß der Abschirmung des Kernfeldes

Die Frage nach dem Einfluß des Abschirm-Formfaktors wird in der nachfolgenden Tabelle 2 quantitativ beantwortet. Aufgeführt sind die Werte des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts Σ ohne Abschirm-Formfaktor, mit vereinfachtem exponentiellen Thomas-Fermi-Modellformfaktor (vgl. 2-20) und mit Drei-Terme-Fit aus dem Hartree-Fock-Verfahren (vgl. 2-18) für drei verschiedene repräsentative kinematische Konfigurationen.

Wie anschaulich zu erwarten, spielt die Abschirmung dann eine große Rolle, wenn die Einschußenergie ω_2 oder der Streuwinkel ϑ_3 klein sind. Aus der ersten Zeile der Tabelle 2 entnimmt man, daß dann eine Reduzierung von Σ um über die Hälfte eintreten kann. Bei Energien im GeV-Bereich ist ersichtlich ein Streuwinkel von $\vartheta_3 = 10$ mrad bereits ein "großer" Winkel in dem Sinn, daß die Abschirmung nur noch wenige Prozent ausmacht (vgl. die zweite Zeile der Tabelle 2). Dort hängen die Ergebnisse dementsprechend auch nicht mehr wesentlich von der Wahl des Abschirmmodells ab, während bei kleinen Energien und kleinen Streuwinkeln eine sorgfältige Behandlung des Abschirmeinflusses notwendig ist. Für alle Berechnungen von Konfigurationen, bei denen der Formfaktor von Bedeutung ist, wurde in dieser Arbeit das Modell 2-18 der dritten Spalte zugrundegelegt.

Der Einfluß der Abschirmung macht sich im differentiellen Wirkungsquerschnitt τ nur dort bemerkbar, wo μ klein ist ($\mu \lesssim 0.1$). Für den Einfluß des Formfaktors auf den teilintegrierten Wirkungsquerschnitt

Σ ist vor allem die Reduzierung der Höhe des Doppelpeaks bei minimalem μ maßgeblich. Da μ quadratisch mit der Einschußenergie ω_2 wächst, nehmen mit wachsendem ω_2 die Abschirmeffekte rasch ab. Dies wird in der dritten Zeile der Tabelle 2 illustriert, wo der Formfaktoreinfluß auch bei einem Streuwinkel von $\sqrt{s} = 1$ mrad nur noch 6 % ausmacht. In diesem Fall ist der Thomas-Fermi-Formfaktor 2-20 offensichtlich keine gute Näherung mehr, da er die Abschirmeffekte zu größeren μ hin zu schwach wiedergibt.

ω_2 (GeV)	ϑ	$\sqrt{s}$ (mrad)	$\Sigma \left(\frac{\text{barn}}{\text{GeV sr}} \right)$		
			ohne FF	FF 2-20	FF 2-18
3.4	0.1	1	61.1	27.5	23.3
3.4	0.1	10	0.0506	0.0491	0.0488
6.1	0.87	1	1.32	1.30	1.24

Tabelle 2

Abhängigkeit des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts Σ der Photonspaltung an Gold von der Behandlung der Abschirmung des Kernfeldes durch die Hüllenelektronen. Angegeben sind die Werte von Σ ohne Formfaktor, mit dem Formfaktormodell 2-20 und dem Formfaktorfit 2-18.

3.3 Das Winkel- und Energieverhalten von Σ

Im folgenden soll ein allgemeiner Überblick über das Verhalten des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts Σ der Photonspaltung an Gold geboten werden. Dazu wurden Daten für verschiedene Streuwinkel ϑ bei Energien im Bereich zwischen 1 und 10.2 GeV berechnet. Die Abhängigkeit vom Energieaufspaltungsverhältnis $\varphi = \omega_2'/\omega_3$ wurde im Intervall $0.1 \leq \varphi \leq 0.95$ untersucht. Alle in diesem Zusammenhang berechneten Daten für Σ mit Angabe des statistischen Schätzfehlers der numerischen Integration sind im Anhang 3 tabelliert.

Wie alle vergleichbaren quantenelektrodynamischen Prozesse zeigt die Photonspaltung wegen der langen Reichweite der elektromagnetischen Wechselwirkung einen scharfen Peak in Vorwärtsrichtung und fällt zur Seitwärtsrichtung hin steil ab. Das genaue Verhalten von Σ ist in den Abbildungen 4, 5, 6 für die Energien $\omega_2 = 1$ GeV und $\omega_2 = 10.2$ GeV und die drei Aufspaltungsverhältnisse $\varphi = 0.1$, 0.5 und 0.95 dargestellt.

Zu großen Winkeln hin ist das Verhalten von Σ für alle Konfigurationen sehr einheitlich, und zwar wird der Abfall grob gesagt durch ein Verhalten proportional zu $\omega_2 t^{-2}$ dominiert. Bei festem φ verhält sich Σ also ungefähr mit der Energie wie ω_2^{-3} und mit dem Streuwinkel wie $\sin^{-4} \frac{\vartheta}{2}$, ähnlich dem Winkelverhalten einer Reihe anderer quantenelektrodynamischer Streuprozesse. Der relativ einfache Verlauf von Σ in Seitwärtsrichtung wird im nachfolgenden Abschnitt 3.4 dazu benutzt werden, eine einfache Interpolationsformel für Σ aufzustellen. Diese

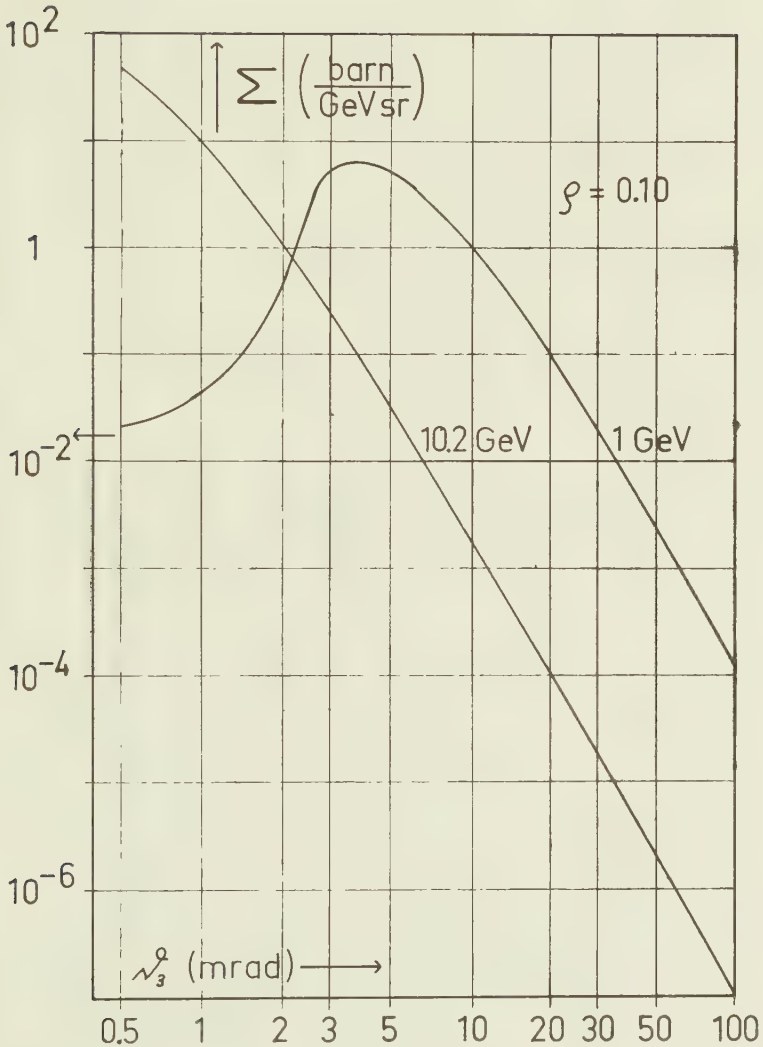


Abbildung 4 Wirkungsquerschnitte der Photonspaltung an Gold (der Pfeil auf der Ordinate markiert $\Sigma(1 \text{ GeV}, 0.1, 0 \text{ mrad})$).

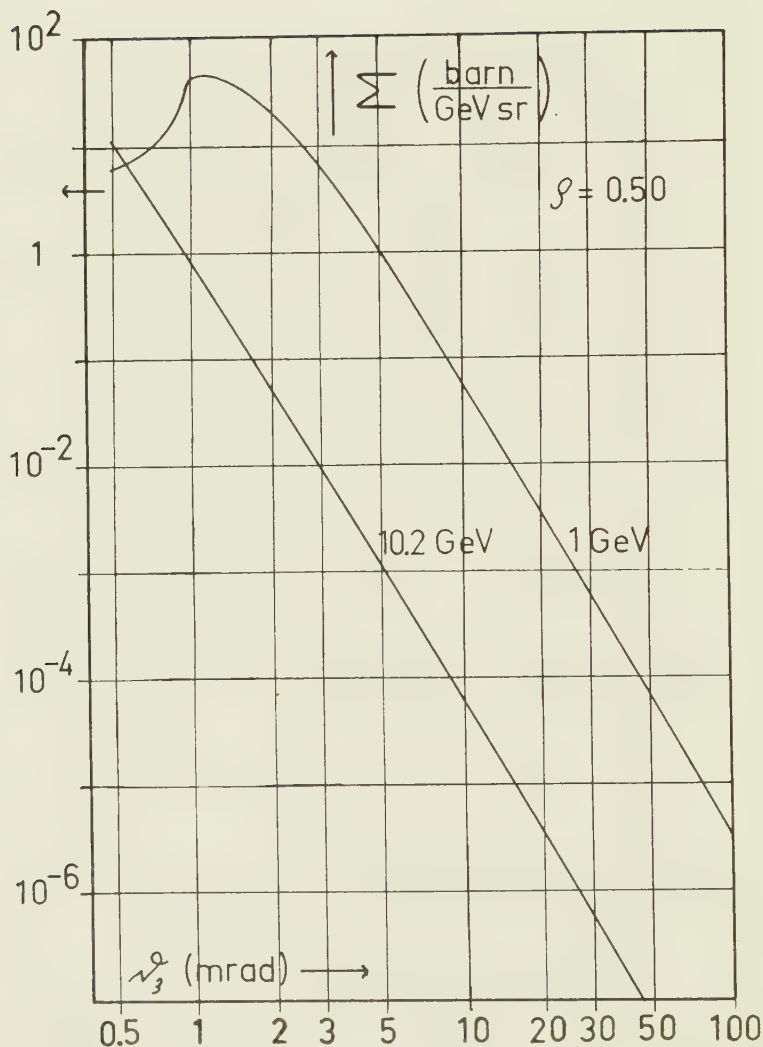


Abbildung 5 Wirkungsquerschnitte der Photonspaltung an Gold (der Pfeil auf der Ordinate markiert $\Sigma(1 \text{ GeV}, 0.5, 0 \text{ mrad})$).

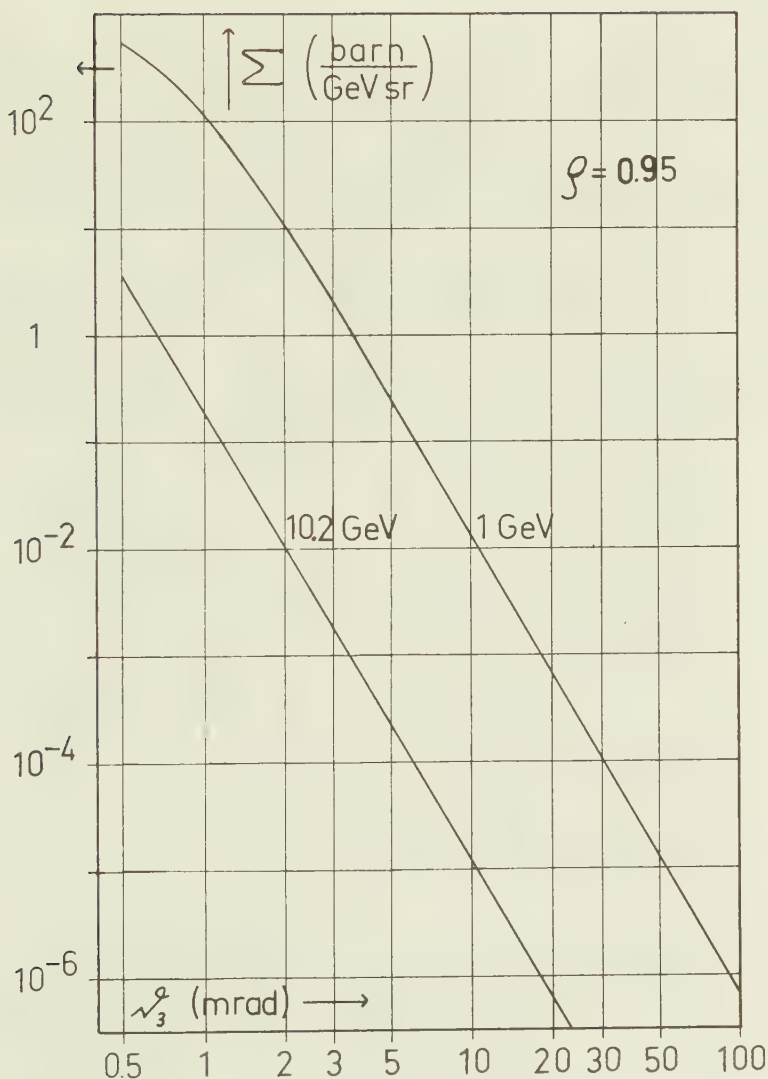


Abbildung 6 Wirkungsquerschnitte der Photonspaltung an Gold (der Pfeil auf der Ordinate markiert Σ (1 GeV, 0.95, 0 mrad)).

Interpolation liefert im genannten Bereich eine ausgezeichnete Näherung für Σ in analytisch geschlossener Form. Demgegenüber ist der Bereich nahe der Vorwärtsrichtung nur durch die numerischen Ergebnisse beschreibbar, da Σ dort eine komplizierte Struktur hat. Wie man aus den Kurven für $\omega_2 = 1 \text{ GeV}$ bei $\vartheta = 0.1$ und $\vartheta = 0.5$ besonders deutlich ersieht, nimmt Σ seinen maximalen Wert nicht in Vorwärtsrichtung bei $\vartheta_3 = 0$ an, sondern hat bei nichtverschwindendem ϑ_3 einen Peak und fällt zur Vorwärtsrichtung hin wieder leicht ab. Der Peak von Σ liegt bei um so größeren Streuwinkeln, je kleiner ϑ ist, und rückt mit wachsender Einschußenergie ω_2 näher an die Vorwärtsrichtung heran. Ersteres ist anschaulich leicht zu verstehen, denn kleine ϑ bedeuten, daß die Energie des Photons 3, dessen Bestimmungsstücke vorgegeben sind, klein ist gegenüber der Energie des Photons 4, über dessen Raumwinkel integriert wird. Bei einem Photon 3 mit kleiner Energie wird aber die Vorwärtsrichtung kinematisch viel weniger ausgezeichnet, als das bei einem Photon 3 mit großer Energie der Fall ist. Das Schrumpfen der Breite des Vorwärtspeaks mit zunehmender Einschußenergie ω_2 ist eine vertraute Eigenschaft der elektromagnetischen Wechselwirkung bei hohen Energien.

Neben den numerisch gewonnenen Ergebnissen über Σ verdient noch eine allgemeine Eigenschaft hervorgehoben zu werden. Der Wirkungsquerschnitt der Photonspaltung ist nicht infrarotdivergent, da Infrarotdivergenzen nur auftreten können, wenn Photonen von äußeren Elektronenlinien emittiert werden. Vielmehr gilt ganz allgemein infolge der Eichinvarianz, daß Diagramme verschwinden, bei denen ein Photon mit verschwindendem Viererimpuls von einer geschlossenen

Elektronenschleife ausgesandt wird (12). Angewandt auf unseren Fall heißt dies, daß Σ verschwindet, wenn die Einschüßenergie ω_2 gegen null geht, und vor allem $\Sigma \rightarrow 0$ für $\varphi \rightarrow 0$ und $\varphi \rightarrow 1$ (der Grenzwert $\varphi \rightarrow 1$ ist im statischen Grenzfall zu verstehen: bei Berücksichtigung der exakten Kinematik ist der maximal erreichbare Wert für φ natürlich etwas kleiner als 1). Bei den betrachteten Einschüßenergien im GeV-Bereich ist das Verschwinden jedoch erst bei Werten von φ erkennbar, die extrem nahe an 0 bzw. 1 liegen (vgl. die im nachfolgenden besprochene Abbildung 7 für $\vartheta_3^e = 0$).

Für ein Experiment zur Messung des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts Σ der Photospaltung ergeben sich aus den drei Abbildungen 4, 5, 6 ähnliche Schlußfolgerungen wie beim differentiellen Wirkungsquerschnitt τ . Bei Streuwinkeln ϑ_3^e von einigen mrad ist eine Einschüßenergie von $\omega_2 = 10.2$ GeV und größer ungünstiger als die Einschüßenergie $\omega_2 = 1$ GeV, da der Wirkungsquerschnitt Σ in Seitwärtsrichtung wie ω_2^{-3} abfällt. Umgekehrt sind zu kleine Einschüßenergien ω_2 ungünstig, da mit ihnen das Maximum nahe der Vorwärtsrichtung immer kleiner wird, und der Wirkungsquerschnitt Σ daher nirgends gut meßbar ist.

Für die Vorwärtsrichtung $\vartheta_3^e = 0$ wurden die Werte von Σ mit dem in Abschnitt 2.2 hergeleiteten Ergebnis für τ in Vorwärtsrichtung des Photons 3 ermittelt. Da τ in diesen Konfigurationen nicht mehr von φ abhängt, ist hierfür nur eine eindimensionale Integration über ϑ_4^e erforderlich. Das Ergebnis für $\Sigma(\vartheta_3^e = 0)$ läßt sich sehr einfach darstellen, da Σ in ausgezeichneter Näherung das einfache Energieverhalten

$$\Sigma (\nu_3^0 = 0) \propto \omega_2 \quad (3-2)$$

aufweist. Das ist eine Folge der relativistischen Invarianz, derentwegen sich τ wie aus Abschnitt 2.2 ersichtlich in der Form

$$\tau \propto \frac{\omega_3 \omega_4}{\omega_2} \cot^2 \frac{\nu_4^0}{2} \phi(r, s) \quad (3-3)$$

darstellen läßt, worin ϕ nur noch eine Funktion der invarianten Parameter r und s ist. Bei kleinen Streuwinkeln ν_4^0 gilt wegen $\omega_4 = (1-g)\omega_2$ und $\omega_3 = g\omega_2$ (vgl. 2-23)

$$\begin{aligned} r \left(\lambda \omega_2, g, \frac{\nu_4^0}{\lambda} \right) &\approx r \left(\omega_2, g, \nu_4^0 \right), \\ s \left(\lambda \omega_2, g, \frac{\nu_4^0}{\lambda} \right) &\approx s \left(\omega_2, g, \nu_4^0 \right), \end{aligned} \quad (3-4)$$

und daher ergibt sich für kleine ν_4^0

$$\tau(\lambda \omega_2, g, \frac{\nu_4^0}{\lambda}) \approx \lambda \omega_2 g (1-g) \cot^2 \frac{\nu_4^0}{2\lambda} \phi(r, s) \approx \quad (3-5)$$

$$\lambda \omega_2 g (1-g) \frac{4\lambda^2}{\nu_4^2} \phi(r, s) \approx \lambda^3 \tau(\omega_2, g, \nu_4^0).$$

Dies ist dasselbe Skalentransformationsgesetz, von dem in (6) zur Darstellung koplanarer Streukonfigurationen des differentiellen Wirkungsquerschnitts τ der Photonspaltung ausführlich Gebrauch gemacht wurde. Beachtet man bei der Integration über ν_4^0 , daß im betrachteten Energiebereich ein nennenswerter Beitrag

zum Integral nur von sehr kleinen Winkeln $\sqrt[2]{4}$ her-
rührt, so ergibt sich aus 3-5

$$\begin{aligned}\Sigma(\omega_2, \vartheta, \sqrt[2]{3}=0) &= 2\pi \int_0^\pi \tau(\omega_2, \vartheta, \sqrt[2]{4}) \sin \sqrt[2]{4} d\sqrt[2]{4} \approx \\ &\approx \lambda^{-3} 2\pi \int_0^\pi \tau(\lambda\omega_2, \vartheta, \frac{\sqrt[2]{4}}{\lambda}) \sqrt[2]{4} d\sqrt[2]{4} \approx \quad (3-6) \\ &\approx \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^{\pi/\lambda} \tau(\lambda\omega_2, \vartheta, \sqrt[2]{4}') \sqrt[2]{4}' d\sqrt[2]{4}' \approx \lambda^{-1} \Sigma(\lambda\omega_2, \vartheta, \sqrt[2]{3}=0).\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die oben angegebene Gleichung 3-2.
Die numerische Nachprüfung dieser Beziehung zeigt,
daß man im Rahmen der numerischen Genauigkeit von
etwa 0.5 % keinen erkennbaren Fehler macht, wenn
man 3-2 als gültig annimmt.

Die Betrachtungen 3-3 bis 3-6 sind nicht auf die
Vorwärtsrichtung $\sqrt[2]{3} = 0$ beschränkt. In leicht nach-
vollziehbarer Verallgemeinerung erhält man generell
eine approximative Skalentransformationsformel der
Form

$$\Sigma(\lambda\omega_2, \vartheta, \frac{\sqrt[2]{3}}{\lambda}) \approx \lambda \Sigma(\omega_2, \vartheta, \sqrt[2]{3}). \quad (3-7)$$

Diese ist für kleine $\sqrt[2]{3}$ im Bereich des Vorwärts-
streupeaks gut brauchbar. Für größere $\sqrt[2]{3}$ im Bereich
der Seitwärtsstreuung liefert eine Anwendung der
Transformationsformel 3-7 jedoch rasch größere Fehler.
Dieser Bereich wird aber von der bereits erwähnten
Interpolationsformel des Abschnitts 3.4 abgedeckt,
die eine Anwendung von 3-7 dort überflüssig macht.
Um nahe der Vorwärtsrichtung aus den in den Abbil-

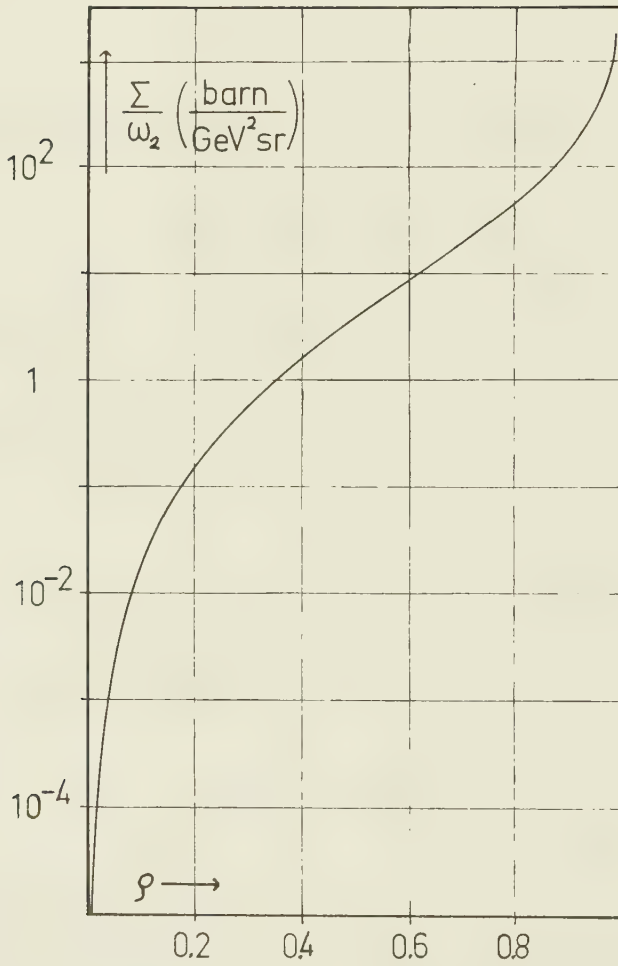


Abbildung 7

Wirkungsquerschnitt der Photonspaltung an Gold in
der Vorwärtsrichtung $\vartheta_3^0 = 0$.

dungen 4, 5, 6 wiedergegebenen Kurven die Werte von Σ für andere Energien zu erschließen, ist 3-7 jedoch gut brauchbar und liefert höchstens Fehler von wenigen Prozent.

Das Verhalten des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts Σ in der Vorwärtsrichtung $\lambda_3^0 = 0$ ist in Abbildung 7 dargestellt, wo Σ/ω_2 als Funktion des einzigen verbleibenden freien Parameters ϱ aufgetragen ist. Das Infrarotverhalten $\Sigma \rightarrow 0$ für $\varrho \rightarrow 0$ ist aus der Abbildung 7 direkt ersichtlich, und zwar gilt für kleine ϱ -Werte $\Sigma \propto \varrho^3$. Das Verhalten $\Sigma \rightarrow 0$ für $\varrho \rightarrow 1$ ist jedoch in Abbildung 7 graphisch nicht mehr darstellbar, da es sich erst für ϱ extrem nahe bei 1 einstellt. Darüberhinaus ist für ϱ sehr nahe bei 1 die approximative Skalentransformation 3-7 nicht mehr gültig, so daß Σ/ω_2 dort nicht mehr energieunabhängig darstellbar wäre. Vielmehr verschiebt sich die Lage des Maximums, das $\omega_2^{-1} \Sigma(\lambda_3^0 = 0)$ kurz vor der Stelle $\varrho = 1$ annimmt, mit wachsender Einschußenergie ω_2 immer näher zu der Stelle $\varrho = 1$ hin, und der Peak wird immer höher. In dem in Abbildung 7 wiedergegebenen ϱ -Bereich $0.01 \leq \varrho \leq 0.99$ ist für Energien zwischen 1 und 10.2 GeV Σ/ω_2 jedoch praktisch unabhängig von ω_2 . Während also in der Vorwärtsrichtung Σ proportional zu ω_2 zunimmt, gilt wie schon früher erwähnt in der Seitwärtsrichtung näherungsweise das völlig andere Energieverhalten $\Sigma \propto \omega_2^{-3}$.

3.4 Analytische Interpolationsformel für Σ in Seitwärtsrichtung

Die experimentell zugänglichen Konfigurationen des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts Σ der Photospaltung fallen bei den betrachteten Energien im GeV-Bereich vornehmlich in das Gebiet des (mit zunehmendem $\sqrt{s}$) steilen Abfalls der im letzten Abschnitt wiedergegebenen Kurven. Die Abbildungen 4, 5, 6 zeigen im abfallenden Ast ein einfaches Winkelverhalten von Σ , dessen führender Anteil durch einen Faktor $\omega_2 t^{-2}$ bestimmt ist. Dies ist freilich nur eine erste grobe Näherung, legt aber den Gedanken nahe, daß es möglich sein könnte, Σ im Bereich der Seitwärtsrichtung durch eine einfache Näherungsformel in geschlossener analytischer Form zu beschreiben. Der Vorteil einer solchen kompakten Interpolationsformel für Σ gegenüber den punktuellen Ergebnissen der exakten numerischen Integration und der ebenfalls nur numerisch auswertbaren Weizsäcker-Williams-Approximation liegt auf der Hand. Dieser Abschnitt befaßt sich daher mit der Aufstellung einer solchen Interpolationsformel aus den exakten numerischen Daten an einer diskreten Menge von Stützstellen.

Aus den in Anhang 3 aufgelisteten Werten für Σ wurde zunächst das bekannte führende Verhalten abgespalten und die dimensionslose Größe

$$\begin{aligned} f(\omega_2, \vartheta, \sqrt{s}) &= \\ &= \frac{16(2\pi)^2}{V_{m^4}} \omega_2^3 \vartheta^2 \sin^4 \frac{\sqrt{s}}{2} \Sigma(\omega_2, \vartheta, \sqrt{s}) = \quad (3-8) \\ &= \frac{(2\pi)^2 m^2}{Z^2 \alpha^3 r_0^2} \frac{t^2}{\omega_2} \Sigma(\omega_2, \vartheta, \sqrt{s}) \end{aligned}$$

gebildet, wo V der konstante Vorfaktor von τ aus Definition 2-21 ist. Das Winkelverhalten dieser Funktion f erweist sich nun über weite Strecken als sehr einfach: trägt man nämlich f für festes ω_2 und g als Funktion von $\ln \sin \frac{\sqrt{s}}{2}$ auf, so liegt eine beträchtliche Anzahl der Punkte praktisch auf einer Geraden.

Dies ist in Abbildung 8 für einige Werte von g bei $\omega_2 = 10.2$ GeV dargestellt. Wie man sieht, treten Abweichungen vom linearen Kurvenverlauf einerseits bei kleinen Streuwinkeln auf, wo das Seitwärtsverhalten von Σ in das Verhalten nahe der Vorwärtsrichtung übergeht (siehe dazu die Abbildungen 4 und 5). Andererseits treten aber in Abbildung 8 auch Abweichungen bei sehr großen Streuwinkeln $\sqrt{s}$ auf. Die folgenden Betrachtungen sind daher nicht nur zur Vorwärtsrichtung hin, sondern auch zu sehr großen Streuwinkeln $\sqrt{s}$ hin begrenzt, wo aber Σ ohnehin sehr klein wird und kaum noch experimentell nachweisbar sein dürfte.

Für Σ ergibt sich somit im linearen Bereich das auch aus theoretischer Sicht akzeptable Winkelverhalten

$$\Sigma \sim \frac{d + g \ln \sin \frac{\sqrt{s}}{2}}{\sin^4 \frac{\sqrt{s}}{2}} . \quad (3-9)$$

Hier ist besonders zu erwähnen, daß sich aus Abbildung 8 eindeutig ergibt, daß Anteile $\propto \ln^2 \sin \frac{\sqrt{s}}{2}$, wie man sie theoretisch durchaus in Σ erwarten könnte, zu Σ im betrachteten Energie- und Winkelbereich nicht erkennbar beitragen, wenn sie überhaupt vorhan-

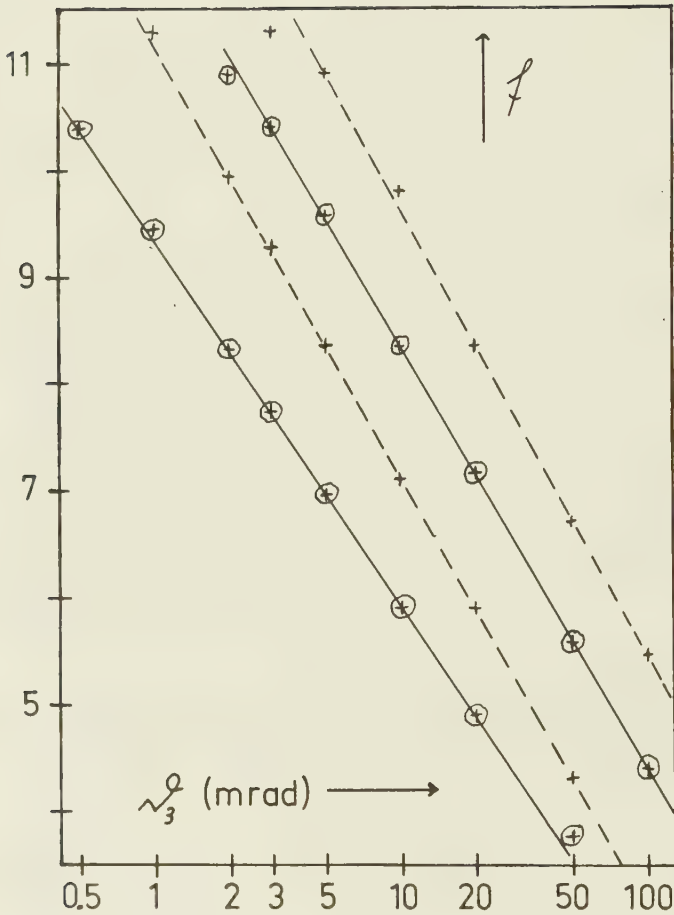


Abbildung 8

Veranschaulichung des näherungsweise linearen Verlaufs von $f(\omega_2, \beta, \theta_3)$ aus Gleichung 4-2 mit $\ln \sin \frac{\theta_3}{2}$ in Seitwärtsrichtung für die Einschüßenergie $\omega_2 = 10.2$ GeV und die β -Werte (von rechts nach links) 0.18 , 0.5 , 0.87 und 0.95 .

den sein sollten. Nahe der Vorwärtsrichtung und vielleicht auch bei sehr großen Streuwinkeln könnten solche Terme jedoch durchaus für die in Abbildung 8 erkennbaren Abweichungen vom linearen Verlauf mit $\ln \sin \frac{\vartheta}{2}$ verantwortlich sein.

Die Grenzwinkel, innerhalb derer ein linearer Verlauf in Abbildung 8 eine gute Approximation darstellt, sind für die verschiedenen Kurven verschieden. Sie liegen zwischen dem Intervall $20 \lesssim \vartheta_3 \lesssim 500$ mrad für kleine φ und $0.5 \lesssim \vartheta_3 \lesssim 20$ mrad für große φ . Mit zunehmendem φ verschieben sich diese Grenzen also - wie übrigens auch mit zunehmendem ω_2 - zu kleineren Winkeln ϑ_3 hin und umgekehrt. Die Breite des Winkelintervalls nimmt für $\varphi \lesssim 0.15$ und $\varphi \gtrsim 0.95$ schnell ab, so daß an beiden Rändern des φ -Bereichs ein Streifen bei der nachfolgenden Betrachtung ausgeklammert werden muß. Für alle mittleren φ ist die Winkelbreite des näherungsweise linearen Verlaufs (bei festgehaltener Energie ω_2) dagegen etwa dieselbe. Sie nimmt mit zunehmender Energie ω_2 zu, mit abnehmender ab. Der Gültigkeitsbereich der angestrebten Interpolationsformel wird später noch an einigen Beispielen aufgezeigt werden.

Versuche mit verschiedenen Modellfunktionen ergaben als günstigsten Näherungsansatz für die Abhängigkeit der Funktion f von den freien Parametern die Gestalt

$$\begin{aligned} f(\omega_2, \varphi, \vartheta_3) &\approx a(\omega_2, \varphi, \vartheta_3) = & (3-10) \\ &= d(\varphi) \left(1 - \sin \vartheta_3\right) + \left(g(\varphi) + h(\varphi) \ln \frac{\omega_2}{m}\right) \times \\ &\quad \times \ln \sin \frac{\vartheta_3}{2} . \end{aligned}$$

Dabei kommt dem Faktor $(1 - \sin \alpha_3^0)$ von $d(\vartheta)$ keine physikalische Bedeutung zu. Er verbessert lediglich die Güte der Approximation spürbar, indem er die bei Abbildung 8 besprochenen Abweichungen vom linearen Verlauf von f mit $\ln \sin \frac{\alpha_3^0}{2}$ für größere α_3^0 geeignet pauschalisiert. Dadurch wird eine schlechte Anpassung der ausgleichenden Geraden vermieden, ohne nur leicht abweichende Punkte aus der Menge der Stützpunkte ganz herausnehmen zu müssen. Die Energieabhängigkeit der Funktion f ist so schwach, daß es genügt, sie als eine physikalisch plausible logarithmische Abhängigkeit der Steigung der ausgleichenden Geraden anzusetzen.

Für die verbleibende ϑ -Abhängigkeit in den Funktionen d , g und h erwiesen sich Padé-artige Approximationsterme als angemessen

$$\begin{aligned} d(\vartheta) &= \frac{1-\vartheta}{1+d_0\vartheta} \left(d_1\vartheta + d_2(\vartheta^2 + \vartheta^4) + d_3\vartheta^3 \right), \\ g(\vartheta) &= \frac{1-\vartheta}{1+g_0\vartheta} \left(g_1 + g_2\vartheta + g_3\vartheta^2 \right), \quad (3-11) \\ h(\vartheta) &= \frac{1-\vartheta}{1+h_0\vartheta} \left(h_1\vartheta^2 + h_2\vartheta^4 \right). \end{aligned}$$

Die elf Fitkonstanten d_i , g_i und h_i , die die kleinste Fehlerquadratsumme ergaben, wurden durch Ausgleichsrechnung bestimmt zu

$$d_0 = -0.94185,$$

$$d_1 = 3.965, \quad d_2 = -28.970, \quad d_3 = 48.510,$$

$$\begin{aligned}
 g_0 &= - 0.98370 , \\
 g_1 &= - 1.7852 , \quad g_2 = - 0.4346 , \quad g_3 = 0.5155 , \\
 h_0 &= - 0.89386 , \\
 h_1 &= 0.0821 , \quad h_2 = - 0.1604 .
 \end{aligned} \tag{3-12}$$

Wie es sein sollte, liegen die Pole der Padé-Nenner in 3-11 mit den Konstanten aus 3-12 alle erkennbar im unphysikalischen Bereich $g > 1$. Physikalisch sind die Padé-Ausdrücke zu verstehen als Pauschalierungen der sehr viel komplizierteren rationalen Ausdrücke, die bei exakter analytischer Integration auftraten.

Die Näherung Σ' für den teilintegrierten Wirkungsquerschnitt Σ der Photonspaltung hat damit die endgültige Gestalt

$$\Sigma'(\omega_2, g, \sqrt{s}) = \frac{Z^2 m^2 \alpha^3 r_0^2}{(2\pi)^2} \frac{a(\omega_2, g, \sqrt{s})}{\omega_2^3 g^2 \sin^4 \frac{\sqrt{s}}{2}} \tag{3-13}$$

Dabei ist die durch 3-10 gegebene Funktion a nicht mehr Z -abhängig, da in Seitwärtsrichtung der Einfluß des Abschirmformfaktors und seiner Z -Abhängigkeit unerheblich wird (vgl. Abschnitt 3.2). Im Gegensatz zur näheren Umgebung der Vorwärtsrichtung, wo Σ durch die Formfaktoreffekte sich nicht exakt $\propto Z^2$ ergibt, gilt in Seitwärtsrichtung in ausgezeichnete Näherung $\Sigma \propto Z^2$.

Für $g \rightarrow 0$ hat der Ansatz 3-13 zwar das unphysikalische Verhalten $\Sigma' \propto g^{-2}$ statt $\Sigma' \rightarrow 0$ zur Folge. Aber für $g \rightarrow 0$ ist bereits ein Fitansatz der Form 3-9, wie schon ausgeführt wurde, nicht mehr gerechtfertigt, da das $\sqrt{s}$ -Intervall, in dem Σ in der Form 3-9 dar-

stellbar ist, schnell sehr klein wird. Praktisch war es daher nur sinnvoll, eine Interpolationsformel für die Seitwärtsrichtung auf der Grundlage der bisher dargelegten Sachverhalte im Bereich $0.15 \lesssim \vartheta \lesssim 0.95$ aufzustellen. In diesem Intervall beobachtet man aber tatsächlich eine dominierende ϑ^{-2} -Abhängigkeit von Σ , in Einklang mit dem Separationsansatz 3-13.

Mit den Fitkonstanten aus 3-12 lassen sich mit Σ' aus 3-13 265 der in Anhang 3 wiedergegebenen 564 Werte von Σ innerhalb eines relativen Fehlers von zwei Prozent approximieren. Bei einer Fehlergrenze von fünf Prozent sind es 315 Wertepunkte von Σ . Erlaubt man einen Fehler von zwanzig Prozent, was der Qualität der Weizsäcker-Williams-Approximation entspricht (vgl. Abschnitt 3.1), so sind 405 von 564 Datenpunkten für Σ mit Σ' innerhalb dieser Fehlergrenze approximierbar. Die restlichen, nicht gut näherbaren Punkte gehören ausnahmslos zu den Bereichen nahe der Vorwärtsrichtung oder sehr großer Streuwinkel $\sim \frac{\pi}{3}$, wo Σ' prinzipiell nicht zur Näherung von Σ geeignet ist.

Eine weitere Demonstration der Qualität der Näherung Σ' aus 3-13 ergibt sich aus der nachfolgenden Tabelle 3. Die dort wiedergegebenen Wertepunkte wurden nicht zur Bestimmung der Fitkonstanten 3-12 herangezogen. Sie erlauben daher eine Kontrolle der Güte von Σ' zur Extrapolation in Gebiete, wo keine numerischen Daten von Σ vorliegen. In der Tabelle 3 sind aus darstellungstechnischen Gründen a und f statt Σ' und Σ angeführt, weil dabei keine Zehnerexponenten angegeben werden müssen. Die Funktionen a aus 3-10 und f aus 3-8 unterscheiden sich von Σ' und Σ nur durch einen gemeinsamen Faktor. Der

ω_2, ϑ	$\sqrt{s_3}$ (mrad)	f	a	Fehler (%)
$\omega_2 = 0.5$ GeV , $\vartheta = 0.9$	10	6.49	6.55	0.9
	20	5.36	5.41	1.0
	50	4.02	3.95	- 1.6
$\omega_2 = 5.0$ GeV , $\vartheta = 0.375$	10	8.79	8.88	1.1
	20	7.62	7.65	0.4
	50	6.01	6.03	0.4
	100	4.83	4.83	- 0.1
$\omega_2 = 8.5$ GeV , $\vartheta = 0.625$	3	9.97	10.1	0.8
	5	9.24	9.16	- 0.8
	10	7.97	7.96	- 0.1
	20	6.79	6.77	- 0.4
	50	5.21	5.21	- 0.1
	100	4.06	4.06	0.1
$\omega_2 = 20.4$ GeV , $\vartheta = 0.84$	1	11.3	11.5	1.9
	2	10.2	10.3	0.6
	3	9.52	9.55	0.2
	5	8.62	8.63	0.2
	10	7.32	7.40	1.1
	20	6.09	6.18	1.4
	50	4.49	4.60	2.5
	100	3.42	3.46	1.3

Tabelle 3

Vergleich der Näherung $a(\omega_2, \vartheta, \sqrt{s_3})$ aus 3-10 für die exakten Werte $f(\omega_2, \vartheta, \sqrt{s_3})$ aus 3-8 bei Extrapolation auf Werte von ω_2, ϑ und $\sqrt{s_3}$, die nicht zur Berechnung der Fitkonstanten 3-12 herangezogen wurden. Aufgeführt ist der $\sqrt{s_3}$ -Bereich der Seitwärtsrichtung, in dem a eine gute Näherung von f darstellt. Der angegebene relative Fehler von a bezüglich f ist gleichzeitig der relative Fehler der Näherung Σ' aus 3-13 für die exakten Werte des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts Σ der Photonspaltung.

relative Fehler von a bezüglich f ist daher auch der relative Fehler von Σ' bezüglich Σ . Die Fehlerangabe in der letzten Spalte der Tabelle 3 gibt übrigenfalls den relativen Fehler der rechnerinternen Daten wieder, und damit nicht immer genau den der auf drei Ziffern gerundeten Angaben in Tabelle 3.

Die erste Datengruppe zu $\omega_2 = 0.5$ GeV und $\vartheta = 0.9$ liegt unterhalb der niedrigsten zum Fit verwendeten Einschubenergie von $\omega_2 = 1$ GeV. Man erkennt hier vor allem die schon früher betonte Aussage, daß mit abnehmender Energie ω_2 das $\sqrt{s}$ -Intervall, in dem eine Näherung von Σ durch Σ' möglich ist, stark abnimmt. Die beiden nächsten Datenblöcke für $\omega_2 = 5$ GeV, $\vartheta = 0.375$ und $\omega_2 = 8$ GeV, $\vartheta = 0.625$ lassen vor allem das Anwachsen des $\sqrt{s}$ -Intervalls für mittlere ϑ erkennen. Die Daten für $\omega_2 = 8$ GeV und $\vartheta = 0.625$ sind dabei in etwa repräsentativ für die Verhältnisse bei den zum Fit verwendeten Daten bei mittleren ϑ und nicht zu kleiner Energie ω_2 . Die letzte Datengruppe für $\omega_2 = 20.4$ GeV und $\vartheta = 0.84$ liegt beim doppelten der höchsten Energie von $\omega_2 = 10.2$ GeV, die zur Ermittlung der Parameter 3-12 verwendet wurde. Nur in diesem Falle tritt ein Punkt auf, der knapp nicht mehr innerhalb zwei Prozent Fehler genähert wird. Insgesamt ist die Qualität der analytischen Näherungsformel 3-13 für Σ in Seitwärtsrichtung äußerst zufriedenstellend, auch bei Extrapolation auf Bereiche außerhalb der zum Fit herangezogenen Datenmenge. Damit liefert die Näherungsformel 3-13 ein Hilfsmittel an die Hand, mit dem die teilintegrierten Wirkungsquerschnitte Σ der Photonspaltung in Seitwärtsrichtung mindestens im Energieintervall $0.5 \leq \omega_2 \leq 20$ GeV abgeschätzt werden können, ohne aufwendige numerische Integrationen durchführen zu müssen.

4. Schlußfolgerungen

Zusammenfassend ergibt sich aus den in dieser Arbeit vorgelegten Ergebnissen, daß die Photonspaltung im elektrostatischen Feld schwerer Kerne ohne weiteres experimentell nachweisbar sein sollte. Allerdings ist bei Streuung von Photonen an einem Target ein sehr hoher Hintergrund inelastisch gestreuter Photonen aus anderen Prozessen vorhanden. Daher ist der Nachweis der Photonspaltung nur mit einer Koinzidenzmessung möglich, die die Herkunft beider gestreuter Photonen von einem einlaufenden Photon sicherstellt.

Für die Messung des differentiellen Wirkungsquerschnitts γ und des teilintegrierten Wirkungsquerschnitts Σ der Photonspaltung sind zu kleine und zu große Energien ω_2 des eingeschossenen Photons ungünstig. Die Höhe der Peaks von γ verhält sich angenähert proportional zu ω_2^3 ; die Höhe der Peaks von Σ verhält sich angenähert proportional zu ω_2 . Die Höhe der maximal erreichbaren Wirkungsquerschnitte nimmt also in beiden Fällen mit abnehmender Energie ab.

Mit zunehmender Einschußenergie ω_2 rückt die Lage der Peaks immer näher an die Vorwärtsrichtung heran. Für $\omega_2 = 1$ GeV liegen die Peaks bei Streuwinkeln von einigen mrad. In der Umgebung dieser Energie sind nach unserer Meinung die günstigsten Bedingungen für eine Messung der Photonspaltung zu finden. Bei viel höheren Einschußenergien ω_2 liegen die Peaks zu nahe an der Vorwärtsrichtung, um noch experimentell zugänglich zu sein.

In der Seitwärtsrichtung nehmen aber die Wirkungsquerschnitte der Photonspaltung mit der Einschuß-

energie stark ab. Der teilintegrierte Wirkungsquerschnitt Σ verhält sich dort angenähert proportional zu ω_2^{-3} ; der differentielle Wirkungsquerschnitt τ nimmt in Seitwärtsrichtung mit zunehmender Energie noch stärker ab.

Die höchsten erreichbaren Werte des differentiellen Wirkungsquerschnitts τ liegen in der Umgebung der Konfiguration mit minimalem Energie-Impuls-Übertrag, bei der der transversale Impulsübertrag verschwindet. Im oben angedeuteten Bereich mittelhoher Einschußenergien ω_2 liegt dieser Peak im experimentell zugänglichen Streuwinkelbereich einiger mrad. Beide hier betrachteten Wirkungsquerschnitte erreichen in diesem Energiebereich bei Streuwinkeln von einigen mrad Größenordnungen, die gut meßbar sein sollten.

Anhang 1

Die Amplitudenfunktionen E

Es folgt eine Auflistung der Amplitudenfunktionen E (vgl. (15)) im allgemeinen Fall und für den Grenzfall $t = 0$. Die dabei auftretenden transzendenten Funktionen B, T, I sind im Anhang 2 zusammengestellt.

Im allgemeinen Fall sind

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} E_{(1)}^{+++}(1, 2, 3, 4) &= \frac{1}{8} E_{(1)}^{+++}(r, s, t) = \\ &= -\frac{2st}{s_1} + \left(\frac{2s^2}{s_1} - \frac{4s^2t}{rs_1} - \frac{4\mu st}{s_1^2} \right) B(s) + \\ &+ \left(\frac{4st}{r} - \frac{2st}{t_1} \right) B(t) + \left(\frac{2\mu s}{s_1} - \frac{4\mu st}{rs_1} + \frac{4\mu st}{s_1^2} - \frac{2\mu s}{t_1} \right) B(-\mu) + \\ &+ \left(\frac{s}{r} - \frac{s}{t} \right) T(r) + \left(\frac{2s(s-t)}{r} - \frac{4s^2t}{r^2} + \frac{s}{t_1} - \frac{s}{r} \right) T(t) + \\ &+ \left(\frac{2s(s-t)}{r} - \frac{4s^2t}{r^2} - \frac{3s}{s_1} - \frac{2st}{s_1^2} - \frac{s}{r} - \frac{s}{t} - 1 \right) T(s) + \\ &+ \left(\frac{2s(t-s)}{r} + \frac{4s^2t}{r^2} + \frac{3s}{s_1} - \frac{s}{t_1} + \frac{2st}{s_1^2} + \frac{s}{r} + \frac{s}{t} \right) T(-\mu) + \\ &+ \frac{r_1(t-r)}{rt} I(r, s, \mu) + \frac{r_1s}{rt} I(r, t, \mu) + \\ &+ \left(\frac{2s(t-s)}{r} + \frac{4s^2t}{r^2} - \frac{s}{t} + \frac{3s}{r} + 2 \right) I(s, t, \mu) \quad , \end{aligned}$$

(A-1)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} E_{(2)}^{+++}(1, 2, 3, 4) &= \frac{1}{4} E_{(2)}^{+++}(r, s, t) = \\
 &= \left(\frac{4s}{r} + \frac{2s}{s_i} \right) B(s) + \left(\frac{4t}{r} + \frac{2t}{t_i} \right) B(t) + \\
 &+ \left(\frac{4\mu}{r} + \frac{2\mu}{s_i} + \frac{2\mu}{t_i} \right) B(-\mu) - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right) T(r) + \\
 &+ \left(\frac{2r_i}{r} - \frac{4st}{r^2} + \frac{r}{s_i t_i} - \frac{3}{r} \right) T(s) + \\
 &+ \left(\frac{2r_i}{r} - \frac{4st}{r^2} + \frac{r}{s t_i} - \frac{3}{r} \right) T(t) + \\
 &+ \left(\frac{4st}{r^2} - \frac{2r_i}{r} - \frac{r_i}{s t_i} + \frac{1}{s_i} + \frac{1}{t_i} + \frac{3}{r} \right) T(-\mu) + \\
 &+ \left(\frac{t}{rs} - \frac{s_i}{rt} + \frac{1}{rs} \right) I(r, s, \mu) + \left(\frac{s}{rt} - \frac{t_i}{rs} + \frac{1}{rt} \right) I(r, t, \mu) + \\
 &+ \left(\frac{4st}{r^2} - \frac{2r_i}{r} - \frac{r_i}{st} + \frac{5}{r} + \frac{1}{st} \right) I(s, t, \mu) \quad ,
 \end{aligned}$$

(A-2)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} E_{(1)}^{--+}(1, 2, 3, 4) &= \frac{1}{8} E_{(1)}^{--+}(r, s, t) = \\
 &= \left(\frac{s}{t} - \frac{s}{r} \right) \left(T(r) + T(s) + T(t) - T(-\mu) \right) + \\
 &+ \frac{r_i}{t} I(r, s, \mu) - \frac{t_i}{r} I(s, t, \mu) \quad ,
 \end{aligned}$$

(A-3)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} E_{(2)}^{-++}(1,2,3,4) &= \frac{1}{4} E_{(2)}^{-++}(r,s,t) = \\
 &= -2 - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right) (T(r) + T(s) + T(t) - T(-\mu)) + \\
 &+ \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{rs} \right) I(r,s,\mu) + \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{rt} \right) I(r,t,\mu) + \\
 &+ \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{st} \right) I(s,t,\mu) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{A-4}$$

Mit den Entwicklungen der Funktionen B , T , I für kleine t aus Anhang 2 werden im Grenzfall $t = 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} E_{(1)}^{+++}(r,s,t=0) &= -\frac{s}{4} E_{(2)}^{+++}(r,s,t=0) = \\
 &= -\frac{s}{4} E_{(2)}^{+++}(r,t=0,s) = \\
 &= -(1+2s)B(r) - \left(\frac{s}{r} + \frac{4s^2}{r} \right) B(s) + \\
 &+ \left(1+2s + \frac{s}{r} + \frac{4s^2}{r} \right) B(-\mu) + \left(1 - \frac{1}{2r} \right) T(r) + \\
 &+ \left(\frac{s}{r} + \frac{2s^2}{r} - \frac{1}{2r} \right) T(s) + \left(\frac{r}{t_1} - \frac{s}{r} - \frac{2s^2}{r} + \frac{1}{2r} \right) T(-\mu) ,
 \end{aligned}
 \tag{A-5}$$

$$\begin{aligned}
 E_{(1)}^{+++}(r,t=0,s) &= E_{(1)}^{+++}(t=0,s,r) = \\
 &= E_{(2)}^{+++}(t=0,s,r) = 0 \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{A-6}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} E_{(1)}^{-++}(r, s, t=0) &= -\frac{1}{8} E_{(1)}^{-++}(t=0, s, r) = \\
 &= \frac{s}{4} E_{(2)}^{-++}(r, s, t=0) = \frac{s}{4} E_{(2)}^{-++}(r, t=0, s) = \\
 &= \frac{s}{4} E_{(2)}^{-++}(t=0, s, r) = \\
 &= -s + B(r) + \frac{s}{r} B(s) - \left(1 + \frac{s}{r}\right) B(-\mu) + \\
 &+ \left(\frac{1}{2r} - 1 - \frac{s}{r}\right) (T(r) + T(s) - T(-\mu)) ,
 \end{aligned}$$

(A-7)

$$E_{(1)}^{-++}(r, t=0, s) = 0 .$$

(A-8)

Anhang 2

Die transzendenten Funktionen $B(x)$, $T(x)$ und $I(x, y, z)$

Zur Darstellung der in den Amplitudenfunktionen E aus Anhang 1 vorkommenden transzendenten Funktionen B , T , I für reelle Argumente führen wir folgende Hilfsgrößen ein:

$$\alpha = \alpha(x, y, z) = \beta\left(\frac{-xy}{x+y+z}\right),$$

$$\beta(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}, & -\infty < x < 0, 1 \leq x < \infty \\ i\sqrt{\frac{1}{x} - 1}, & 0 < x < 1 \end{cases},$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \infty \end{cases}. \quad (\text{A-9})$$

Die stetige, komplexwertige Funktion $B(x)$ ist dann gegeben durch

$$B(x) = -\frac{x}{2} \int_1^{\infty} \frac{du}{u} \frac{\beta(u)}{u - x - i\varepsilon} = \quad (\text{A-10})$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{\beta(x)}{2} \ln \frac{\beta(x)+1}{\beta(x)-1} - 1\right) - i\theta(x-1) \frac{\pi}{2} \beta(x) =$$

$$= \begin{cases} \beta(x) \operatorname{Arsinh} \sqrt{x} - 1, & -\infty < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -i\beta(x) \operatorname{arcsin} \sqrt{x} - 1, & 0 < x < 1 \\ \beta(x) \operatorname{Arcoosh} \sqrt{x} - 1 - i\frac{\pi}{2} \beta(x), & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Für kleine Werte von x ergibt sich für $B(x)$ die Reihenentwicklung

$$B(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!} x^n = \quad (A-11)$$

$$= -\frac{1}{3}x - \frac{2}{15}x^2 - \frac{8}{105}x^3 - \dots \quad \text{für } |x| \leq 1.$$

Die stetige, komplexwertige Funktion $T(x)$ ist gegeben durch

$$T(x) = -\frac{x}{2} \int_1^{\infty} \frac{du}{u} \frac{1}{u-x-i\varepsilon} \ln \frac{1+\beta(u)}{1-\beta(u)} = \quad (A-12)$$

$$= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\beta(x)+1}{\beta(x)-1} \right)^2 - i \theta(x-1) \frac{\pi}{2} \ln \frac{1+\beta(x)}{1-\beta(x)} =$$

$$= \begin{cases} (\operatorname{Arsinh} \sqrt{-x})^2, & -\infty < x < 0 \\ -(\arcsin \sqrt{x})^2, & 0 \leq x < 1 \\ (\operatorname{Arcosh} \sqrt{x})^2 - \frac{\pi^2}{4} - i\pi \operatorname{Arcosh} \sqrt{x}, & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Für kleine Werte von x ergibt sich für $T(x)$ die Reihenentwicklung

$$T(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \frac{x^n}{n} = \quad (A-13)$$

$$= -x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{45}x^3 - \dots \quad \text{für } |x| \leq 1.$$

Zur Darstellung der stetigen, komplexwertigen Funktion $I(x, y, z)$ führen wir die Hilfsgröße

$$\begin{aligned} g(x, \alpha(x, y, z)) = & \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\alpha} \left(\phi \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta(x)} \right) + \right. \right. \\ & + \phi \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - \beta(x)} \right) - \phi \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta(x)} \right) - \left. \left. \phi \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta(x)} \right) \right) \right) + \\ & + i \theta(x-1) \frac{\pi}{2\alpha} \ln \frac{\alpha - \beta(x)}{\alpha + \beta(x)} \end{aligned} \quad (\text{A-14})$$

ein, wo (für komplexe v)

$$\phi(v) = \int_0^v \frac{\ln(1-w)}{w} dw \quad (\text{A-15})$$

die Spence-Funktion bedeutet (22) (wegen einer Reihe nützlicher Hinweise zur Programmierung der Spence-Funktion siehe Liebsch (4)).

Damit ist $I(x, y, z)$ gegeben durch

$$I(x, y, z) = g(x, \alpha) + g(y, \alpha) - g(-z, \alpha) . \quad (\text{A-16})$$

Die Funktion I hat damit ersichtlich die Symmetrieeigenschaft

$$I(x, y, z) = I(y, x, z) . \quad (\text{A-17})$$

Zur Herleitung der Grenzwerte der Amplitudenfunktionen E für $t = 0$ im Anhang 1 benötigen wir zwei verschiedene Entwicklungsformeln für I . Zunächst ist für kleine x

$$\begin{aligned}
 I(x, y, z) = & -xy \frac{2}{y_1} (B(y) - B(-z)) + \\
 & + x^2 y \left(\frac{2}{3y_1} + \frac{4(1-y)}{3y_1^2} B(y) + \left(\frac{4(y-1)}{3y_1^2} - \frac{2}{3y_1 z} \right) B(-z) \right) \\
 & + O(x^3) \quad , \quad (A-18)
 \end{aligned}$$

wo in Anlehnung an die bisher gewählte Schreibweise $y_1 = y + z$ ist.

Zum anderen gilt für kleine t mit den Hilfsgrößen

$$\begin{aligned}
 f(u, x) = & -ux + \frac{1}{4} u^2 (3x + 2x^2) - \\
 & - \frac{1}{24} u^3 (15x + 10x^2 + 8x^3) + O(u^4) \quad , \\
 u = & \frac{t}{rs} \quad (A-19)
 \end{aligned}$$

die Entwicklungsformel

$$\begin{aligned}
 I(r, s, \mu) = & -\frac{1}{4} tu + \frac{1}{12} tu^2 (3 - \mu) + \\
 & + f(u, r) B(r) + f(u, s) B(s) - f(u, -\mu) B(-\mu) + \\
 & + \left(1 - \frac{1}{2} u + \frac{3}{8} u^2 - \frac{5}{16} u^3 \right) (T(r) + T(s) - T(-\mu)) + \\
 & + O(t^4) \quad . \quad (A-20)
 \end{aligned}$$

Bei der Ausführung der Grenzbetrachtungen in Anhang 1 wird jeweils die höchste angegebene Potenz von t in Gleichungen A-18 und A-20 nicht mehr gebraucht.

Anhang 3

Tabelle der numerischen Resultate für den teilintegrierten Wirkungsquerschnitt Σ der Photonspaltung an Gold

Es bedeuten

Spalte 1	Einschußenergie ω_1 (GeV)
Spalte 2	Energieaufspaltungsverhältnis $\xi = \frac{\omega_2}{\omega_1}$
Spalte 3	Streuwinkel $\sqrt{3}$ (rad)
Spalte 4	Wirkungsquerschnitt Σ ($\frac{\text{barn}}{\text{GeV sr}}$)
Spalte 5	geschätzter Fehler der numerischen Berechnung von Σ ($\frac{\text{barn}}{\text{GeV sr}}$)

OMEGA 2	KIU	THETA	SIGMA	FIHLER
0.5	0.900	0.0030	0.4918E+02	0.14E+00
0.5	0.900	0.0030	0.1489E+02	0.40E-01
0.5	0.900	0.0050	0.2295E+01	0.62E-02
0.5	0.900	0.0100	0.1306E+00	0.27E-03
0.5	0.900	0.0200	0.6742E-02	0.13E-04
0.5	0.900	0.0500	0.1294E-03	0.19E-06
1.0	0.100	0.0005	0.2137E-01	0.22E-03
1.0	0.100	0.0006	0.2353E-01	0.20E-03
1.0	0.100	0.0007	0.2643E-01	0.27E-03
1.0	0.100	0.0008	0.3064E-01	0.38E-03
1.0	0.100	0.0010	0.4594E-01	0.10E-02
1.0	0.100	0.0020	0.3646E+00	0.13E-02
1.0	0.100	0.0030	0.4738E+01	0.37E-01
1.0	0.100	0.0050	0.5082E+01	0.19E-01
1.0	0.100	0.0100	0.1030E+01	0.37E-02
1.0	0.100	0.0200	0.9743E-01	0.34E-03
1.0	0.100	0.0500	0.2231E-02	0.63E-05
1.0	0.100	0.1000	0.1134E-03	0.27E-06
1.0	0.100	0.5000	0.9084E-07	0.23E-09
1.0	0.100	1.0000	0.3758E-08	0.14E-10
1.0	0.180	0.0010	0.3400E+00	0.32E-02
1.0	0.180	0.0020	0.5062E+01	0.27E-01
1.0	0.180	0.0030	0.1191E+02	0.43E-01
1.0	0.180	0.0050	0.4213E+01	0.16E-01
1.0	0.180	0.0100	0.5002E+00	0.31E-02
1.0	0.180	0.0200	0.3273E-01	0.11E-03
1.0	0.180	0.0500	0.6828E-03	0.17E-05
1.0	0.180	0.1000	0.3452E-04	0.74E-07
1.0	0.180	0.5000	0.2770E-07	0.73E-10
1.0	0.180	1.0000	0.1136E-08	0.34E-11
1.0	0.250	0.0010	0.1148E+01	0.76E-02
1.0	0.250	0.0020	0.2101E+02	0.15E+00
1.0	0.250	0.0030	0.1163E+02	0.55E-01
1.0	0.250	0.0050	0.3145E+01	0.20E-01
1.0	0.250	0.0100	0.2820E+00	0.13E-02
1.0	0.250	0.0200	0.1671E-01	0.54E-04
1.0	0.250	0.0500	0.3419E-03	0.84E-06
1.0	0.250	0.1000	0.1738E-04	0.37E-07
1.0	0.250	0.5000	0.1370E-07	0.34E-10
1.0	0.250	1.0000	0.5561E-09	0.12E-11
1.0	0.500	0.0005	0.6075E+01	0.33E-01
1.0	0.500	0.0007	0.9779E+01	0.48E-01
1.0	0.500	0.0009	0.1991E+02	0.70E-01
1.0	0.500	0.0010	0.3988E+02	0.19E+00
1.0	0.500	0.0020	0.2146E+02	0.83E-01
1.0	0.500	0.0030	0.6739E+01	0.44E-01
1.0	0.500	0.0050	0.1107E+01	0.76E-02

OMEGA	KHI	THETA	SIGMA	FEHLER
1.0	0.500	0.0100	0.6749E-01	0.27E-03
1.0	0.500	0.0200	0.3657E-02	0.98E-05
1.0	0.500	0.0500	0.7314E-04	0.16E-06
1.0	0.500	0.1000	0.3639E-05	0.74E-08
1.0	0.500	0.5000	0.2718E-08	0.44E-11
1.0	0.500	1.0000	0.1108E-09	0.16E-12
1.0	0.750	0.0005	0.7264E+02	0.45E+00
1.0	0.750	0.0010	0.9971E+02	0.35E+00
1.0	0.750	0.0020	0.1617E+02	0.73E-01
1.0	0.750	0.0030	0.3888E+01	0.25E-01
1.0	0.750	0.0050	0.5060E+00	0.30E-02
1.0	0.750	0.0100	0.2762E-01	0.74E-04
1.0	0.750	0.0200	0.1456E-02	0.33E-05
1.0	0.750	0.0500	0.2824E-04	0.56E-07
1.0	0.750	0.1000	0.1352E-05	0.29E-08
1.0	0.750	0.5000	0.1054E-08	0.22E-11
1.0	0.750	1.0000	0.4272E-10	0.26E-12
1.0	0.810	0.0005	0.2019E+03	0.89E+00
1.0	0.810	0.0010	0.1062E+03	0.36E+00
1.0	0.810	0.0020	0.1505E+02	0.65E-01
1.0	0.810	0.0030	0.3404E+01	0.20E-01
1.0	0.810	0.0050	0.4254E+00	0.21E-02
1.0	0.810	0.0100	0.2288E-01	0.56E-04
1.0	0.810	0.0200	0.1197E-02	0.25E-05
1.0	0.810	0.0500	0.2300E-04	0.45E-07
1.0	0.810	0.1000	0.1095E-05	0.26E-08
1.0	0.810	0.5000	0.8917E-09	0.27E-11
1.0	0.810	1.0000	0.3500E-10	0.29E-12
1.0	0.870	0.0005	0.3478E+03	0.13E+01
1.0	0.870	0.0010	0.1125E+03	0.37E+00
1.0	0.870	0.0020	0.1371E+02	0.53E-01
1.0	0.870	0.0030	0.2908E+01	0.14E-01
1.0	0.870	0.0050	0.3515E+00	0.13E-02
1.0	0.870	0.0100	0.1868E-01	0.39E-04
1.0	0.870	0.0200	0.9700E-03	0.19E-05
1.0	0.870	0.0500	0.1852E-04	0.32E-07
1.0	0.870	0.1000	0.8991E-06	0.15E-08
1.0	0.870	0.5000	0.7446E-09	0.41E-11
1.0	0.870	1.0000	0.2738E-10	0.31E-12
1.0	0.920	0.0005	0.4557E+03	0.14E+01
1.0	0.920	0.0010	0.1161E+03	0.37E+00
1.0	0.920	0.0020	0.1206E+02	0.40E-01
1.0	0.920	0.0030	0.2428E+01	0.89E-02
1.0	0.920	0.0050	0.2871E+00	0.70E-03
1.0	0.920	0.0100	0.1515E-01	0.32E-04
1.0	0.920	0.0200	0.7830E-03	0.15E-05
1.0	0.920	0.0500	0.1516E-04	0.25E-07

OMEGA 2	RHO	THETA	SIGMA	FEHLER
1.0	0.920	0.1000	0.7708E-06	0.11E-08
1.0	0.920	0.5000	0.6064E-09	0.18E-13
1.0	0.920	1.0000	0.2063E-10	0.28E-12
1.0	0.950	0.0005	0.5341E+03	0.15E+01
1.0	0.950	0.0010	0.1146E+03	0.33E+00
1.0	0.950	0.0020	0.1053E+02	0.26E-01
1.0	0.950	0.0030	0.2060E+01	0.48E-02
1.0	0.950	0.0050	0.2422E+00	0.52E-03
1.0	0.950	0.0100	0.1276E-01	0.30E-04
1.0	0.950	0.0200	0.6646E-03	0.11E-05
1.0	0.950	0.0500	0.1339E-04	0.19E-07
1.0	0.950	0.1000	0.7019E-06	0.15E-08
1.0	0.950	0.5000	0.5008E-09	0.49E-11
1.0	0.950	1.0000	0.1604E-10	0.23E-12
1.7	0.100	0.0010	0.3273E+00	0.17E-03
1.7	0.100	0.0020	0.1368E+02	0.77E-01
1.7	0.100	0.0030	0.8389E+01	0.38E-01
1.7	0.100	0.0050	0.2760E+01	0.10E-01
1.7	0.100	0.0100	0.3256E+00	0.14E-02
1.7	0.100	0.0200	0.2177E-01	0.77E-04
1.7	0.100	0.0500	0.4524E-03	0.12E-05
1.7	0.100	0.1000	0.2301E-04	0.52E-07
1.7	0.100	0.5000	0.1843E-07	0.46E-10
1.7	0.100	1.0000	0.7665E-09	0.26E-11
1.7	0.180	0.0010	0.3336E+01	0.17E-01
1.7	0.180	0.0020	0.1652E+02	0.60E-01
1.7	0.180	0.0030	0.6842E+01	0.26E-01
1.7	0.180	0.0050	0.1536E+01	0.10E-01
1.7	0.180	0.0100	0.1190E+00	0.85E-03
1.7	0.180	0.0200	0.6800E-02	0.23E-04
1.7	0.180	0.0500	0.1381E-03	0.34E-06
1.7	0.180	0.1000	0.7005E-05	0.16E-07
1.7	0.180	0.5000	0.5647E-08	0.13E-10
1.7	0.180	1.0000	0.2310E-09	0.53E-12
1.7	0.250	0.0010	0.1888E+02	0.11E+00
1.7	0.250	0.0020	0.1503E+02	0.79E-01
1.7	0.250	0.0030	0.5110E+01	0.43E-01
1.7	0.250	0.0050	0.9365E+00	0.13E-01
1.7	0.250	0.0100	0.6217E-01	0.36E-03
1.7	0.250	0.0200	0.3421E-02	0.11E-04
1.7	0.250	0.0500	0.6964E-04	0.17E-06
1.7	0.250	0.1000	0.3528E-05	0.78E-08
1.7	0.250	0.5000	0.2784E-08	0.70E-11
1.7	0.250	1.0000	0.1128E-09	0.27E-12
1.7	0.500	0.0005	0.2937E+02	0.33E+00
1.7	0.500	0.0010	0.5355E+02	0.20E+00
1.7	0.500	0.0020	0.7642E+01	0.56E-01

OMEGA 2	RHO	THETA	SIGMA	FEHLER
1.7	0.500	0.0030	0.1826E+01	0.12E-01
1.7	0.500	0.0050	0.2471E+00	0.17E-02
1.7	0.500	0.0100	0.1388E-01	0.55E-04
1.7	0.500	0.0200	0.7449E-03	0.20E-05
1.7	0.500	0.0500	0.1488E-04	0.32E-07
1.7	0.500	0.1000	0.7402E-06	0.15E-08
1.7	0.500	0.5000	0.5525E-09	0.89E-12
1.7	0.500	1.0000	0.2249E-10	0.33E-13
1.7	0.750	0.0005	0.2228E+03	0.79E+00
1.7	0.750	0.0010	0.4632E+02	0.19E+00
1.7	0.750	0.0020	0.4310E+01	0.31E-01
1.7	0.750	0.0030	0.8740E+00	0.59E-02
1.7	0.750	0.0050	0.1050E+00	0.63E-03
1.7	0.750	0.0100	0.5650E-02	0.15E-04
1.7	0.750	0.0200	0.2976E-03	0.67E-06
1.7	0.750	0.0500	0.5754E-05	0.12E-07
1.7	0.750	0.1000	0.2743E-06	0.63E-09
1.7	0.750	0.5000	0.2147E-09	0.48E-12
1.7	0.750	1.0000	0.8691E-11	0.51E-13
1.7	0.810	0.0005	0.2473E+03	0.84E+00
1.7	0.810	0.0010	0.4466E+02	0.19E+00
1.7	0.810	0.0020	0.3788E+01	0.26E-01
1.7	0.810	0.0030	0.7423E+00	0.45E-02
1.7	0.810	0.0050	0.8765E-01	0.43E-03
1.7	0.810	0.0100	0.4685E-02	0.11E-04
1.7	0.810	0.0200	0.2451E-03	0.52E-06
1.7	0.810	0.0500	0.4678E-05	0.10E-07
1.7	0.810	0.1000	0.2237E-06	0.48E-09
1.7	0.810	0.5000	0.1811E-09	0.53E-12
1.7	0.810	1.0000	0.7041E-11	0.58E-13
1.7	0.870	0.0005	0.2743E+03	0.91E+00
1.7	0.870	0.0010	0.4270E+02	0.18E+00
1.7	0.870	0.0020	0.3254E+01	0.14E-01
1.7	0.870	0.0030	0.6176E+00	0.31E-02
1.7	0.870	0.0050	0.7209E-01	0.26E-03
1.7	0.870	0.0100	0.3832E-02	0.81E-05
1.7	0.870	0.0200	0.1994E-03	0.40E-06
1.7	0.870	0.0500	0.3788E-05	0.62E-08
1.7	0.870	0.1000	0.1834E-06	0.29E-09
1.7	0.870	0.5000	0.1521E-09	0.83E-12
1.7	0.870	1.0000	0.5586E-11	0.55E-13
1.7	0.920	0.0005	0.2976E+03	0.97E+00
1.7	0.920	0.0010	0.3982E+02	0.15E+00
1.7	0.920	0.0020	0.2738E+01	0.83E-02
1.7	0.920	0.0030	0.5088E+00	0.18E-02
1.7	0.920	0.0050	0.5880E-01	0.14E-03
1.7	0.920	0.0100	0.3117E-02	0.65E-05

OMEGA 2	RHO	THETA	SIGMA	FEHLER
1.7	0.920	0.0200	0.1615E-03	0.34E-06
1.7	0.920	0.0500	0.3117E-05	0.50E-08
1.7	0.920	0.1000	0.1576E-06	0.22E-09
1.7	0.920	0.5000	0.1240E-09	0.99E-12
1.7	0.920	1.0000	0.4254E-11	0.54E-13
1.7	0.950	0.0005	0.3084E+03	0.95E+00
1.7	0.950	0.0010	0.3626E+02	0.11E+00
1.7	0.950	0.0020	0.2338E+01	0.56E-01
1.7	0.950	0.0030	0.4295E+00	0.99E-03
1.7	0.950	0.0050	0.4972E-01	0.12E-03
1.7	0.950	0.0100	0.2632E-02	0.61E-05
1.7	0.950	0.0200	0.1375E-03	0.22E-06
1.7	0.950	0.0500	0.2757E-05	0.38E-08
1.7	0.950	0.1000	0.1438E-06	0.30E-09
1.7	0.950	0.5000	0.1008E-09	0.11E-11
1.7	0.950	1.0000	0.3112E-11	0.50E-13
3.4	0.100	0.0010	0.2746E+02	0.26E+00
3.4	0.100	0.0020	0.9393E+01	0.36E-01
3.4	0.100	0.0030	0.3405E+01	0.20E-01
3.4	0.100	0.0050	0.6787E+00	0.48E-02
3.4	0.100	0.0100	0.4912E-01	0.34E-03
3.4	0.100	0.0200	0.2759E-02	0.98E-05
3.4	0.100	0.0500	0.5618E-04	0.15E-06
3.4	0.100	0.1000	0.2862E-05	0.64E-08
3.4	0.100	0.5000	0.2304E-08	0.62E-11
3.4	0.100	1.0000	0.9564E-10	0.31E-12
3.4	0.180	0.0005	0.6731E+01	0.61E-01
3.4	0.180	0.0010	0.3306E+02	0.13E+00
3.4	0.180	0.0020	0.6213E+01	0.42E-01
3.4	0.180	0.0030	0.1684E+01	0.11E-01
3.4	0.180	0.0050	0.2567E+00	0.20E-02
3.4	0.180	0.0100	0.1571E-01	0.10E-03
3.4	0.180	0.0200	0.8414E-03	0.29E-05
3.4	0.180	0.0500	0.1722E-04	0.44E-07
3.4	0.180	0.1000	0.8770E-06	0.19E-08
3.4	0.180	0.5000	0.7060E-09	0.16E-11
3.4	0.180	1.0000	0.2876E-10	0.89E-13
3.4	0.180	2.0000	0.1195E-11	0.29E-14
3.4	0.180	3.1416	0.3229E-12	0.68E-15
3.4	0.250	0.0005	0.3850E+02	0.29E+00
3.4	0.250	0.0010	0.3000E+02	0.12E+00
3.4	0.250	0.0020	0.4086E+01	0.30E-01
3.4	0.250	0.0030	0.1011E+01	0.48E-01
3.4	0.250	0.0050	0.1368E+00	0.11E-02
3.4	0.250	0.0100	0.7897E-02	0.49E-04
3.4	0.250	0.0200	0.4265E-03	0.14E-05
3.4	0.250	0.0500	0.8633E-05	0.21E-07

OMEGA 2	RHO	THETA	SIGMA	FEHLER
3.4	0.250	0.1000	0.4376E-06	0.94E-09
3.4	0.250	0.5000	0.3489E-09	0.79E-12
3.4	0.250	1.0000	0.1413E-10	0.41E-13
3.4	0.500	0.0005	0.1072E+03	0.40E+00
3.4	0.500	0.0010	0.1549E+02	0.90E-01
3.4	0.500	0.0020	0.1265E+01	0.10E-01
3.4	0.500	0.0030	0.2584E+00	0.20E-02
3.4	0.500	0.0050	0.3175E-01	0.22E-03
3.4	0.500	0.0100	0.1735E-02	0.68E-05
3.4	0.500	0.0200	0.9299E-04	0.25E-06
3.4	0.500	0.0500	0.1852E-05	0.41E-08
3.4	0.500	0.1000	0.9213E-07	0.19E-09
3.4	0.500	0.5000	0.6890E-10	0.13E-12
3.4	0.500	1.0000	0.2789E-11	0.41E-14
3.4	0.750	0.0005	0.9224E+02	0.39E+00
3.4	0.750	0.0010	0.9061E+01	0.83E-01
3.4	0.750	0.0020	0.5940E+00	0.45E-02
3.4	0.750	0.0030	0.1122E+00	0.73E-03
3.4	0.750	0.0050	0.1320E-01	0.77E-04
3.4	0.750	0.0100	0.7090E-03	0.19E-05
3.4	0.750	0.0200	0.3727E-04	0.85E-07
3.4	0.750	0.0500	0.7183E-06	0.15E-08
3.4	0.750	0.1000	0.3444E-07	0.74E-10
3.4	0.750	0.5000	0.2682E-10	0.55E-13
3.4	0.750	1.0000	0.1076E-11	0.53E-14
3.4	0.810	0.0005	0.8921E+02	0.39E+00
3.4	0.810	0.0010	0.8129E+01	0.73E-01
3.4	0.810	0.0020	0.5054E+00	0.35E-02
3.4	0.810	0.0030	0.9418E-01	0.57E-03
3.4	0.810	0.0050	0.1101E-01	0.53E-04
3.4	0.810	0.0100	0.5894E-03	0.14E-05
3.4	0.810	0.0200	0.3074E-04	0.69E-07
3.4	0.810	0.0500	0.5846E-06	0.13E-08
3.4	0.810	0.1000	0.2794E-07	0.58E-10
3.4	0.810	0.5000	0.2265E-10	0.72E-13
3.4	0.810	1.0000	0.8888E-12	0.71E-14
3.4	0.870	0.0005	0.8605E+02	0.38E+00
3.4	0.870	0.0010	0.7181E+01	0.52E-01
3.4	0.870	0.0020	0.4221E+00	0.26E-02
3.4	0.870	0.0030	0.7782E-01	0.39E-03
3.4	0.870	0.0050	0.9066E-02	0.32E-04
3.4	0.870	0.0100	0.4837E-03	0.10E-05
3.4	0.870	0.0200	0.2510E-04	0.54E-07
3.4	0.870	0.0500	0.4753E-06	0.88E-09
3.4	0.870	0.1000	0.2292E-07	0.36E-10
3.4	0.870	0.5000	0.1894E-10	0.10E-12
3.4	0.870	1.0000	0.6965E-12	0.74E-14

OMEGA 2	RHO	THETA	SIGMA	FEHLER
3.4	0.920	0.0005	0.8201E+02	0.34E+00
3.4	0.920	0.0010	0.6184E+01	0.29E-01
3.4	0.920	0.0020	0.3491E+00	0.11E-02
3.4	0.920	0.0030	0.6394E-01	0.23E-03
3.4	0.920	0.0050	0.7413E-02	0.19E-04
3.4	0.920	0.0100	0.3949E-03	0.88E-06
3.4	0.920	0.0200	0.2041E-04	0.42E-07
3.4	0.920	0.0500	0.3908E-06	0.61E-09
3.4	0.920	0.1000	0.1967E-07	0.28E-10
3.4	0.920	0.5000	0.1531E-10	0.13E-12
3.4	0.920	1.0000	0.5044E-12	0.73E-14
3.4	0.950	0.0005	0.7743E+02	0.29E+00
3.4	0.950	0.0010	0.5336E+01	0.17E-01
3.4	0.950	0.0020	0.2963E+00	0.72E-03
3.4	0.950	0.0030	0.5403E-01	0.13E-03
3.4	0.950	0.0050	0.6288E-02	0.17E-04
3.4	0.950	0.0100	0.3346E-03	0.79E-06
3.4	0.950	0.0200	0.1743E-04	0.28E-07
3.4	0.950	0.0500	0.3471E-06	0.46E-09
3.4	0.950	0.1000	0.1800E-07	0.33E-10
3.4	0.950	0.5000	0.1247E-10	0.12E-12
3.4	0.950	1.0000	0.3719E-12	0.59E-14
5.0	0.375	0.0010	0.8348E+01	0.49E-01
5.0	0.375	0.0020	0.6791E+00	0.48E-02
5.0	0.375	0.0030	0.1412E+00	0.11E-02
5.0	0.375	0.0050	0.1816E-01	0.12E-03
5.0	0.375	0.0100	0.1019E-02	0.65E-05
5.0	0.375	0.0200	0.5522E-04	0.16E-06
5.0	0.375	0.0500	0.1115E-05	0.25E-08
5.0	0.375	0.1000	0.5611E-07	0.12E-09
5.0	0.375	0.5000	0.4336E-10	0.95E-13
5.0	0.375	1.0000	0.1729E-11	0.28E-14
6.8	0.100	0.0005	0.5363E+02	0.45E+00
6.8	0.100	0.0010	0.1880E+02	0.97E-01
6.8	0.100	0.0020	0.2868E+01	0.14E-01
6.8	0.100	0.0030	0.7205E+00	0.56E-02
6.8	0.100	0.0050	0.1063E+00	0.73E-03
6.8	0.100	0.0100	0.6329E-02	0.44E-04
6.8	0.100	0.0200	0.3418E-03	0.12E-05
6.8	0.100	0.0500	0.6932E-05	0.18E-07
6.8	0.100	0.1000	0.3531E-06	0.82E-09
6.8	0.100	0.5000	0.2884E-09	0.70E-12
6.8	0.100	1.0000	0.1198E-10	0.41E-13
6.8	0.100	2.0000	0.5200E-12	0.15E-14
6.8	0.100	3.1416	0.1517E-12	0.42E-15
6.8	0.180	0.0005	0.6608E+02	0.34E+00
6.8	0.180	0.0010	0.1240E+02	0.55E-01

OMEGA 2	RHO	THETA	SIGMA	FEHLER
6.8	0.180	0.0020	0.1219E+01	0.92E-02
6.8	0.180	0.0030	0.2654E+00	0.20E-02
6.8	0.180	0.0050	0.3454E-01	0.28E-03
6.8	0.180	0.0100	0.1963E-02	0.13E-04
6.8	0.180	0.0200	0.1046E-03	0.36E-06
6.8	0.180	0.0500	0.2147E-05	0.56E-08
6.8	0.180	0.1000	0.1095E-06	0.24E-09
6.8	0.180	0.5000	0.8812E-10	0.20E-12
6.8	0.180	1.0000	0.3578E-11	0.11E-13
6.8	0.180	2.0000	0.1473E-12	0.36E-15
6.8	0.180	3.1416	0.3961E-13	0.85E-16
6.8	0.250	0.0005	0.5969E+02	0.25E+00
6.8	0.250	0.0010	0.8249E+01	0.48E-01
6.8	0.250	0.0020	0.6766E+00	0.56E-02
6.8	0.250	0.0030	0.1410E+00	0.13E-02
6.8	0.250	0.0050	0.1769E-01	0.15E-03
6.8	0.250	0.0100	0.9799E-03	0.65E-05
6.8	0.250	0.0200	0.5315E-04	0.17E-06
6.8	0.250	0.0500	0.1078E-05	0.27E-08
6.8	0.250	0.1000	0.5471E-07	0.12E-09
6.8	0.250	0.5000	0.4335E-10	0.11E-12
6.8	0.250	1.0000	0.1745E-11	0.42E-14
6.8	0.250	2.0000	0.6888E-13	0.16E-15
6.8	0.250	3.1416	0.1727E-13	0.32E-16
6.8	0.500	0.0005	0.3068E+02	0.23E+00
6.8	0.500	0.0010	0.2630E+01	0.41E-01
6.8	0.500	0.0020	0.1728E+00	0.20E-02
6.8	0.500	0.0030	0.3327E-01	0.29E-03
6.8	0.500	0.0050	0.3974E-02	0.28E-04
6.8	0.500	0.0100	0.2164E-03	0.85E-06
6.8	0.500	0.0200	0.1161E-04	0.31E-07
6.8	0.500	0.0500	0.2314E-06	0.51E-09
6.8	0.500	0.1000	0.1151E-07	0.23E-10
6.8	0.500	0.5000	0.8573E-11	0.13E-13
6.8	0.500	1.0000	0.3444E-12	0.50E-15
6.8	0.500	2.0000	0.1169E-13	0.56E-16
6.8	0.500	3.1416	0.1874E-14	0.15E-16
6.8	0.750	0.0005	0.1802E+02	0.14E+00
6.8	0.750	0.0010	0.1305E+01	0.25E-01
6.8	0.750	0.0020	0.7573E-01	0.58E-03
6.8	0.750	0.0030	0.1408E-01	0.87E-04
6.8	0.750	0.0050	0.1652E-02	0.96E-05
6.8	0.750	0.0100	0.8878E-04	0.23E-06
6.8	0.750	0.0200	0.4658E-05	0.11E-07
6.8	0.750	0.0500	0.8958E-07	0.19E-09
6.8	0.750	0.1000	0.4294E-08	0.93E-11
6.8	0.750	0.5000	0.3324E-11	0.81E-14

OMEGA 2	RHO	THETA	SIGMA	FEHLER
6.8	0.750	1.0000	0.1327E-12	0.93E-15
6.8	0.750	2.0000	0.3391E-14	0.46E-16
6.8	0.750	3.1416	0.1366E-15	0.20E-17
6.8	0.810	0.0005	0.1631E+02	0.12E+00
6.8	0.810	0.0010	0.1129E+01	0.18E-01
6.8	0.810	0.0020	0.6386E-01	0.44E-03
6.8	0.810	0.0030	0.1182E-01	0.70E-04
6.8	0.810	0.0050	0.1381E-02	0.66E-05
6.8	0.810	0.0100	0.7391E-04	0.18E-06
6.8	0.810	0.0200	0.3849E-05	0.84E-08
6.8	0.810	0.0500	0.7303E-07	0.15E-09
6.8	0.810	0.1000	0.3488E-08	0.71E-11
6.8	0.810	0.5000	0.2816E-11	0.91E-14
6.8	0.810	1.0000	0.1088E-12	0.89E-15
6.8	0.810	2.0000	0.2491E-14	0.45E-16
6.8	0.810	3.1416	0.4790E-16	0.87E-18
6.8	0.870	0.0005	0.1472E+02	0.10E+00
6.8	0.870	0.0010	0.9575E+00	0.10E-01
6.8	0.870	0.0020	0.5303E-01	0.32E-03
6.8	0.870	0.0030	0.9773E-02	0.48E-04
6.8	0.870	0.0050	0.1141E-02	0.40E-05
6.8	0.870	0.0100	0.6078E-04	0.13E-06
6.8	0.870	0.0200	0.3144E-05	0.70E-08
6.8	0.870	0.0500	0.5939E-07	0.11E-09
6.8	0.870	0.1000	0.2861E-08	0.45E-11
6.8	0.870	0.5000	0.2352E-11	0.13E-13
6.8	0.870	1.0000	0.8455E-13	0.93E-15
6.8	0.870	2.0000	0.1638E-14	0.31E-16
6.8	0.870	3.1416	0.8503E-17	0.18E-18
6.8	0.920	0.0005	0.1313E+02	0.90E-01
6.8	0.920	0.0010	0.7972E+00	0.43E-02
6.8	0.920	0.0020	0.4378E-01	0.13E-03
6.8	0.920	0.0030	0.8047E-02	0.28E-04
6.8	0.920	0.0050	0.9358E-03	0.25E-05
6.8	0.920	0.0100	0.4979E-04	0.12E-06
6.8	0.920	0.0200	0.2566E-05	0.52E-08
6.8	0.920	0.0500	0.4886E-07	0.76E-10
6.8	0.920	0.1000	0.2457E-08	0.35E-11
6.8	0.920	0.5000	0.1893E-11	0.16E-13
6.8	0.920	1.0000	0.5962E-13	0.89E-15
6.8	0.920	2.0000	0.9172E-15	0.24E-16
6.8	0.920	3.1416	0.2030E-18	0.45E-20
6.8	0.950	0.0005	0.1184E+02	0.12E+00
6.8	0.950	0.0010	0.6736E+00	0.72E-02
6.8	0.950	0.0020	0.3767E-01	0.37E-03
6.8	0.950	0.0030	0.6811E-02	0.20E-04
6.8	0.950	0.0050	0.7959E-03	0.21E-05

OMEGA 2	RHO	THETA	SIGMA	FEHLER
6.8	0.950	0.0100	0.4227E-04	0.93E-07
6.8	0.950	0.0200	0.2193E-05	0.32E-08
6.8	0.950	0.0500	0.4346E-07	0.58E-10
6.8	0.950	0.1000	0.2248E-08	0.42E-11
6.8	0.950	0.5000	0.1530E-11	0.15E-13
6.8	0.950	1.0000	0.4165E-13	0.68E-15
8.5	0.625	0.0005	0.1167E+02	0.10E+00
8.5	0.625	0.0010	0.8582E+00	0.14E-01
8.5	0.625	0.0020	0.5497E-01	0.45E-03
8.5	0.625	0.0030	0.1046E-01	0.79E-04
8.5	0.625	0.0050	0.1256E-02	0.81E-05
8.5	0.625	0.0100	0.6769E-04	0.22E-06
8.5	0.625	0.0200	0.3607E-05	0.92E-08
8.5	0.625	0.0500	0.7088E-07	0.15E-09
8.5	0.625	0.1000	0.3455E-08	0.75E-11
8.5	0.625	0.5000	0.2558E-11	0.60E-14
8.5	0.625	1.0000	0.1033E-12	0.30E-15
10.2	0.100	0.0005	0.5010E+02	0.47E+00
10.2	0.100	0.0010	0.1020E+02	0.49E-01
10.2	0.100	0.0020	0.1086E+01	0.85E-02
10.2	0.100	0.0030	0.2442E+00	0.17E-02
10.2	0.100	0.0050	0.3286E-01	0.28E-03
10.2	0.100	0.0100	0.1865E-02	0.13E-04
10.2	0.100	0.0200	0.1010E-03	0.36E-06
10.2	0.100	0.0500	0.2051E-05	0.53E-08
10.2	0.100	0.1000	0.1045E-06	0.24E-09
10.2	0.100	0.5000	0.8500E-10	0.21E-12
10.2	0.100	1.0000	0.3522E-11	0.12E-13
10.2	0.100	2.0000	0.1529E-12	0.45E-15
10.2	0.100	3.1416	0.4448E-13	0.13E-15
10.2	0.180	0.0005	0.4107E+02	0.19E+00
10.2	0.180	0.0010	0.5058E+01	0.37E-01
10.2	0.180	0.0020	0.4030E+00	0.35E-02
10.2	0.180	0.0030	0.8279E-01	0.79E-03
10.2	0.180	0.0050	0.1034E-01	0.90E-04
10.2	0.180	0.0100	0.5797E-03	0.39E-05
10.2	0.180	0.0200	0.3092E-04	0.11E-06
10.2	0.180	0.0500	0.6359E-06	0.17E-08
10.2	0.180	0.1000	0.3244E-07	0.70E-10
10.2	0.180	0.5000	0.2607E-10	0.59E-13
10.2	0.180	1.0000	0.1055E-11	0.32E-14
10.2	0.180	2.0000	0.4306E-13	0.11E-15
10.2	0.180	3.1416	0.1152E-13	0.25E-16
10.2	0.250	0.0005	0.3040E+02	0.14E+00
10.2	0.250	0.0010	0.3020E+01	0.32E-01
10.2	0.250	0.0020	0.2149E+00	0.24E-02
10.2	0.250	0.0030	0.4374E-01	0.72E-03

OMEGA 2	RHO	THETA	SIGMA	FEHLER
10.2	0.250	0.0050	0.5266E-02	0.45E-04
10.2	0.250	0.0100	0.2898E-03	0.19E-05
10.2	0.250	0.0200	0.1573E-04	0.50E-07
10.2	0.250	0.0500	0.3193E-06	0.80E-09
10.2	0.250	0.1000	0.1621E-07	0.34E-10
10.2	0.250	0.5000	0.1287E-10	0.29E-13
10.2	0.250	1.0000	0.5157E-12	0.13E-14
10.2	0.250	2.0000	0.2002E-13	0.49E-16
10.2	0.250	3.1416	0.4976E-14	0.10E-16
10.2	0.500	0.0005	0.1121E+02	0.88E-01
10.2	0.500	0.0010	0.8460E+00	0.22E-01
10.2	0.500	0.0020	0.5220E-01	0.71E-03
10.2	0.500	0.0030	0.9903E-02	0.89E-04
10.2	0.500	0.0050	0.1176E-02	0.82E-05
10.2	0.500	0.0100	0.6405E-04	0.25E-06
10.2	0.500	0.0200	0.3437E-05	0.92E-08
10.2	0.500	0.0500	0.6852E-07	0.15E-09
10.2	0.500	0.1000	0.3404E-08	0.69E-11
10.2	0.500	0.5000	0.2534E-11	0.41E-14
10.2	0.500	1.0000	0.1009E-12	0.19E-15
10.2	0.500	2.0000	0.3341E-14	0.19E-16
10.2	0.500	3.1416	0.5123E-15	0.42E-17
10.2	0.750	0.0005	0.5931E+01	0.53E-01
10.2	0.750	0.0010	0.3996E+00	0.10E-01
10.2	0.750	0.0020	0.2252E-01	0.17E-03
10.2	0.750	0.0030	0.4167E-02	0.27E-04
10.2	0.750	0.0050	0.4897E-03	0.28E-05
10.2	0.750	0.0100	0.2631E-04	0.69E-07
10.2	0.750	0.0200	0.1379E-05	0.31E-08
10.2	0.750	0.0500	0.2650E-07	0.53E-10
10.2	0.750	0.1000	0.1270E-08	0.27E-11
10.2	0.750	0.5000	0.9828E-12	0.20E-14
10.2	0.750	1.0000	0.3901E-13	0.24E-15
10.2	0.750	2.0000	0.9374E-15	0.14E-16
10.2	0.750	3.1416	0.2997E-16	0.61E-18
10.2	0.810	0.0005	0.5277E+01	0.47E-01
10.2	0.810	0.0010	0.3415E+00	0.66E-02
10.2	0.810	0.0020	0.1895E-01	0.13E-03
10.2	0.810	0.0030	0.3507E-02	0.21E-04
10.2	0.810	0.0050	0.4096E-03	0.19E-05
10.2	0.810	0.0100	0.2191E-04	0.52E-07
10.2	0.810	0.0200	0.1140E-05	0.25E-08
10.2	0.810	0.0500	0.2169E-07	0.45E-10
10.2	0.810	0.1000	0.1032E-08	0.23E-11
10.2	0.810	0.5000	0.8272E-12	0.28E-14
10.2	0.810	1.0000	0.3145E-13	0.25E-15
10.2	0.810	2.0000	0.6719E-15	0.13E-16

OMEGA 2	RHO	THETA	SIGMA	FEHLER
10.2	0.810	3.1416	0.8072E-17	0.18E-18
10.2	0.870	0.0005	0.4663E+01	0.39E-01
10.2	0.870	0.0010	0.2865E+00	0.34E-02
10.2	0.870	0.0020	0.1576E-01	0.95E-04
10.2	0.870	0.0030	0.2905E-02	0.14E-04
10.2	0.870	0.0050	0.3390E-03	0.12E-05
10.2	0.870	0.0100	0.1803E-04	0.39E-07
10.2	0.870	0.0200	0.9332E-06	0.34E-08
10.2	0.870	0.0500	0.1756E-07	0.32E-10
10.2	0.870	0.1000	0.8467E-09	0.13E-11
10.2	0.870	0.5000	0.6919E-12	0.39E-14
10.2	0.870	1.0000	0.2427E-13	0.27E-15
10.2	0.870	2.0000	0.4073E-15	0.83E-17
10.2	0.870	3.1416	0.6316E-18	0.13E-19
10.2	0.920	0.0005	0.4106E+01	0.30E-01
10.2	0.920	0.0010	0.2407E+00	0.14E-02
10.2	0.920	0.0020	0.1322E-01	0.41E-04
10.2	0.920	0.0030	0.2431E-02	0.81E-05
10.2	0.920	0.0050	0.2831E-03	0.77E-06
10.2	0.920	0.0100	0.1503E-04	0.35E-07
10.2	0.920	0.0200	0.7732E-06	0.16E-08
10.2	0.920	0.0500	0.1466E-07	0.24E-10
10.2	0.920	0.1000	0.7348E-09	0.10E-11
10.2	0.920	0.5000	0.5697E-12	0.46E-14
10.2	0.920	1.0000	0.1764E-13	0.24E-15
10.2	0.950	0.0005	0.3538E+01	0.22E-01
10.2	0.950	0.0010	0.2012E+00	0.65E-03
10.2	0.950	0.0020	0.1107E-01	0.29E-04
10.2	0.950	0.0030	0.2030E-02	0.54E-05
10.2	0.950	0.0050	0.2371E-03	0.74E-06
10.2	0.950	0.0100	0.1258E-04	0.29E-07
10.2	0.950	0.0200	0.6518E-06	0.10E-08
10.2	0.950	0.0500	0.1287E-07	0.18E-10
10.2	0.950	0.1000	0.6657E-09	0.14E-11
10.2	0.950	0.5000	0.4431E-12	0.37E-14
10.2	0.950	1.0000	0.1079E-13	0.14E-15
20.4	0.840	0.0005	0.6324E+00	0.62E-02
20.4	0.840	0.0010	0.3844E-01	0.59E-03
20.4	0.840	0.0020	0.2171E-02	0.13E-04
20.4	0.840	0.0030	0.4000E-03	0.23E-05
20.4	0.840	0.0050	0.4691E-04	0.19E-06
20.4	0.840	0.0100	0.2490E-05	0.63E-08
20.4	0.840	0.0200	0.1295E-06	0.31E-09
20.4	0.840	0.0500	0.2443E-08	0.49E-11
20.4	0.840	0.1000	0.1164E-09	0.21E-12
20.4	0.840	0.5000	0.9279E-13	0.37E-15
20.4	0.840	1.0000	0.3144E-14	0.30E-16

Anhang 4

Kurzbeschreibung des Programms COMRAT zur analytischen Manipulation einfacher rationaler Ausdrücke

Die in Abschnitt 2.2 beschriebene Herleitung des differentiellen Wirkungsquerschnitts σ der Photospaltung, wenn ein Photon in Vorwärtsrichtung ausläuft, erfordert die Berechnung des Grenzfalles $t = 0$ in den in Anhang 1 wiedergegebenen Amplitudenfunktionen E . Dabei müssen die transzendenten Funktionen B , T und I an der Stelle $t = 0$ entwickelt (siehe Anhang 2) und die ersten Glieder der Potenzreihen in die Amplitudenfunktionen E eingesetzt werden. Es entstehen zwischenzeitlich recht umfangreiche rationale Ausdrücke, ehe sich alle Terme wegheben, die ein t im Nenner aufweisen. Erst dann kann man $t = 0$ setzen und erhält die in Anhang 1 dargestellten Ergebnisse.

Für die analytische Manipulation solcher umfangreicher rationaler Ausdrücke auf einer DEC PDP-15 Rechenanlage mit mindestens 16 K Kernspeicher wurde das Programm COMRAT entwickelt. COMRAT ist ein Assembler-Programm, mit dem interaktiv (oder auch wahlweise programmgesteuert) einfache rationale Ausdrücke addiert und multipliziert werden können; es erlaubt die Substitution von Symbolen durch rationale Ausdrücke; dazu kommen eine Reihe organisatorischer Funktionen wie etwa Schreiben und Einlesen von Ausdrücken auf Magnetband zur Zwischenspeicherung.

Wegen der starken Beschränkung, mit einem Arbeitsspeicher von nur 16 K 18-Bit-Worten ablauffähig

zu sein, verarbeitet COMRAT nur einfache rationale Ausdrücke:

COMRAT arbeitet mit einem Symbolvorrat von dreißig feststehenden Zeichen, aus denen die Terme und Ausdrücke aufgebaut werden. Die Terme setzen sich aus einem ganzzahligen Koeffizienten k mit $|k| < 131072$ und einer Reihe von Symbolen zusammen, die im Zähler oder Nenner stehen können. Ein Ausdruck besteht aus einer Folge von Termen. Kompliziertere Organisationsformen für Ausdrücke, die etwa Klammern oder mehrere Bruchstrichebenen erfordern, sind in COMRAT nicht darstellbar. In vielen Fällen lassen sich aber durch geeignete Manipulationen und Ersetzungen auch scheinbar kompliziertere rationale Ausdrücke mit COMRAT manipulieren.

In COMRAT können bis zu vier verschiedene rationale Ausdrücke gleichzeitig im Kernspeicher vorhanden sein. Hinzu kommt die Möglichkeit, Ausdrücke auf Magnetband zu schreiben und bei Bedarf (auch in einem anderen Programmlauf) wieder einzulesen. Insbesondere ermöglicht die interaktive Arbeitsweise gezielte Reaktionen auf die entstandenen Zwischenergebnisse und eine sofortige Kontrolle, ob die vorgenommenen Manipulationen für die weitere Verarbeitung nützlich sind. Umgekehrt ist die Option der programmgesteuerten Arbeitsweise sinnvoll, wenn sehr viele einzelne Verarbeitungsschritte notwendig sind, da sie eine einfache Korrektur eventuell vorgekommener Eingabefehler erlaubt.

Für Interessenten steht eine ausführliche Anwendungsbeschreibung des Programms COMRAT zur Verfügung (23).

Anhang 5

Zur numerischen Integration von τ

Wegen der funktionalen Gestalt des differentiellen Wirkungsquerschnitts τ und dessen in Abschnitt 2.3 besprochenem Verhalten sind bei der numerischen Integration von 3-1 eine Reihe von Vorkehrungen erforderlich.

Zunächst treten im Integranden τ Scheinsingularitäten auf, die numerische Schwierigkeiten nach sich ziehen können. Empirisch stellt man fest, daß die nähere Umgebung solcher Scheinsingularitäten nur dann zu irregulären Werten für τ führen kann, wenn der Quotient irgendwelcher zwei der Parameter aus 1-14 größer als 10^4 wird (vierzehnstellige Rechengenauigkeit vorausgesetzt). Solche Bereiche machen nur einen kleinen Bruchteil des gesamten Integrationsgebietes in 3-3 aus, und es kommt demgemäß nicht allzuhäufig vor, daß eine Stützstelle der Integration in einen solchen Bereich zu liegen kommt. Entsprechend kann man die zugeordneten Schwierigkeiten ohne erheblichen Mehraufwand umgehen.

Eine solche Scheinsingularität tritt für $s = 0$ am linken Rand des Integrationsgebietes ($\sqrt{s}_4 = 0$) auf, wenn das Photon 4 in Vorwärtsrichtung ausläuft. Prinzipiell ist der konstante Wert von τ entlang der φ -Achse anhand der Ergebnisse aus Abschnitt 2.2 bekannt, wenn man dort die Werte für die Photonen 3 und 4 gegeneinander austauscht. τ verhält sich für $\sqrt{s}_4 \rightarrow 0$ aber so glatt, daß es genügt, den Wert von τ für Vorwärtsstreuung durch Extrapolation von kleinen $\sqrt{s}_4$ aus abzuschätzen. Dieser Schätzwert stimmt im allgemeinen auf mindestens drei Stellen mit dem exakten Ergebnis überein. Wenn ein Integrationsstützpunkt so nahe bei $\sqrt{s}_4 = 0$ zu liegen kommt, daß eine direkte

numerische Berechnung wegen eines Kompensationsfehlers im Matricelement nicht mehr möglich ist, genügt es, den tatsächlichen Wert von τ an dieser Stelle durch den extrapolierten Wert für exakte Vorwärtsrichtung zu ersetzen. Der dabei im Integranden in Kauf genommene Fehler ist vernachlässigbar klein.

Eine weitere Scheinsingularität am Rande des Integrationsgebietes tritt mit $r = 0$ für $\varphi = 0$ und $\varphi_3 = \varphi_4$ an genau einem Punkt der φ_4 -Achse auf, wenn beide gestreuten Photonen kollinear auslaufen. Da der Wirkungsquerschnitt τ für $\varphi = 0$ gegenüber dem Wert für $\varphi = \pi$ wie in Abschnitt 2.3 dargestellt im allgemeinen um etwa eine Größenordnung abgefallen ist, trägt das Gebiet um $\varphi = 0$ nicht wesentlich zum Integral bei. Es ist daher ohne großen Informationsverlust möglich, einen schmalen Streifen entlang der φ_4 -Achse von der numerischen Integration auszunehmen, und seinen Beitrag nur durch Extrapolation abzuschätzen. Praktisch erwies sich ein Streifen von der Breite $\frac{\pi}{100}$ für alle Fälle als ausreichend, um die Scheinsingularität zu umgehen und dennoch nur einen vernachlässigbaren Schätzbeitrag dieses Streifens zum Gesamtwert des Integrals zu erhalten. Sicherheitshalber wurde der geschätzte Beitrag des Streifens voll zum übrigen Fehler der numerischen Integration hinzugerechnet und stellte sich als unerheblich kleiner Beitrag zu diesem heraus.

Im Inneren des Integrationsgebietes treten als letzte zu berücksichtigende Scheinsingularitäten Linien auf, entlang derer s_1 oder t_1 verschwinden. Das Vorgehen, falls ein Integrationsstützpunkt gelegentlich zu nahe an eine solche Scheinsingularität heranrückt, ist prinzipiell dasselbe wie im Fall der $s = 0$ Scheinsingularität. Der Integrand verläuft so glatt, daß

es genügt, für γ statt des exakten Wertes einen Schätzwert einzusetzen, der ermittelt wird, indem man den Wert an einer nahegelegenen Stelle errechnet, die dennoch schon weit genug von der Scheinsingularität $s_1 = 0$ oder $t_1 = 0$ entfernt ist, um numerisch problemlos auswertbar zu sein. Da solche Fälle nur selten eintreten, ist der dabei in Kauf genommene Fehler wiederum vernachlässigbar klein.

Neben diesen technischen Problemen rein numerischen Ursprungs ist das Doppelpeakverhalten des differentiellen Wirkungsquerschnitts für Konfigurationen mit minimalem μ die wichtigste prinzipielle Schwierigkeit, der beim numerischen Vorgehen Rechnung getragen werden muß. Obwohl μ an dieser Stelle sehr klein werden kann, treten hier keine numerischen Kompensationen im oben beschriebenen Sinn auf, da die Amplitudenfunktionen E für $\mu = 0$ keine Scheinsingularitäten aufweisen. Wie in Abschnitt 2.3 ausführlich besprochen liegt dieser Doppelpeak nahe der Achse $\gamma = \pi$ etwa an der Stelle $\nu_4 \approx \frac{5}{1-5} \nu_3$. Während man den ungefähren Ort des Doppelpeaks also vor der Berechnung kennt, läßt sich die Breite des Peaks in γ - und ν_4 -Richtung nicht allgemein für alle Konfigurationen abschätzen. Diesen Gegebenheiten wurde mit zwei Maßnahmen begegnet. Erstens wird das Integrationsgebiet nicht durch gleichmäßige Einteilung der Achsen in gleich große Subvolumina zerlegt, sondern von Anfang an die Unterteilung dort feiner vorgenommen, wo der Peak voraussichtlich liegen wird. Umgekehrt begnügt man sich dort mit einer sehr groben Intervallunterteilung, wo der Integrand flach verläuft und zudem keinen sehr großen Beitrag zum Integral mehr liefert. Dies allein reicht jedoch nicht immer aus, um den Doppelpeak

hinreichend gut aufzulösen, dessen Beitrag zum Integral allein zwischen 20% und 40% ausmacht. Eine noch feinere Unterteilung von Anfang an würde jedoch häufig zu viele sehr kleine Subvolumina auch an Stellen zur Folge haben, wo der Peak in einer konkreten Konfiguration schon abgeklungen ist. Solche redundanten Subvolumina (die bei anderen Konfigurationen aber gebraucht würden) erhöhen unnötig den Rechenzeitbedarf.

Um die Rechenzeit in Schranken zu halten, wurde zweitens ein Vorgehen in zwei Schritten gewählt. Im ersten Schritt wird, mit ungefähr angepaßter Intervallvorgabe, eine grobe erste Integration durchgeführt. Dabei wird jedoch eine zu kleine Zahl von Subvolumina (in den meisten Berechnungen belief sie sich auf 1239 Unterrechtecke) vorgegeben, mit der die Integrationsgenauigkeit häufig nur ungefähr zehn Prozent betrug. Im zweiten Schritt wird die Zahl der Subvolumina vermehrt (in den meisten Berechnungen auf 3278 Unterrechtecke), und zwar indem gezielt diejenigen Intervalle weiter unterteilt werden, aus denen ein großer Beitrag zum Integral im ersten Lauf stammte. Auf diese Weise wird der zweite Lauf automatisch den bei verschiedenen Konfigurationen wechselnden Breiten des Doppelpeaks optimal angepaßt, und unnötige Intervallverfeinerungen werden vermieden. Für diesen Zweck wurde ein Programm geschrieben, das die vorgegebene Zahl der zu setzenden neuen Teilungspunkte so auf die Intervalle aus dem ersten Integrationslauf verteilt, daß die Zahl der neuen Intervalle in einem alten Intervall proportional zum Integralbeitrag dieses Intervalles wird (bzw. wahlweise proportional zum Fehlerbeitrag des alten Intervalls).

Zur Durchführung der numerischen Integration wurde das am CERN entwickelte Monte-Carlo-Integrationsprogramm RIWIAD herangezogen. Dieses Programm legt in jedes Integrationssubvolumen eine festgelegte Anzahl n (in unserem Fall $n = 4$) statistisch verteilte Stützstellen, an denen der Wert des Integranden berechnet wird. Der Mittelwert des Integranden an diesen n Stützstellen wird als effektiver Beitrag in diesem Subvolumen angesehen, und gleichzeitig wird durch Ermittlung der Standardabweichung dieser n Funktionswerte ein Schätzwert für den wahrscheinlichen Fehler der numerischen Integration gewonnen.

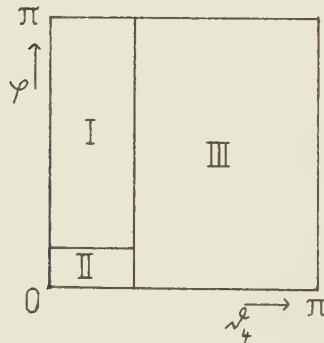


Abbildung 9

Schematische Darstellung der Aufteilung des Integrationsgebietes in das Hauptintegrationsgebiet (I), den wegen der $r = 0$ Scheinsingularität abgeschätzten Streifen (II) und die zum Integral kaum beitragende Seitwärtsrichtung (III).

Da die Hauptbeiträge zum Integral von einem kleinen Teil des gesamten Integrationsgebietes nahe der Vorwärtsrichtung $\varphi_4 = 0$ herrühren, wurde zusätzlich der Bereich großer Winkel φ_4 abgetrennt und dessen kleiner Beitrag zum Integral separat durch eine grobe numerische Integration berechnet. Insgesamt ergibt sich damit eine Aufteilung des gesamten Integrationsquadrats in drei Teilbereiche, die in Abbildung 9 zusammenfassend dargestellt ist.

Mit diesem Vorgehen wurde erreicht, daß der geschätzte Fehler der numerischen Integration in der Regel bei nur etwa 0.3% lag und bei keiner interessierenden Konfiguration 2% überstieg. Der Rechenzeitbedarf lag bei rund einer Minute pro Σ -Wert auf der CDC CYBER 175 des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften (bzw. bei rund zwanzig Minuten für die anfänglichen Rechnungen auf der TR-440).

Literaturverzeichnis

- 1 S.I. Vavilov, Journ. Russ. Phys. Chem. 60 (1928) 555; Phys. Rev. 36 (1930) 1590.
M. Delbrück, Zeits. Phys. 84 (1933) 144.
C. Halpern, Phys. Rev. 44 (1933) 855.
H. Euler, B. Kockel, Naturwiss. 23 (1935) 246.
E.J. Williams, Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-Fys. Med. 13 (1935) Nr. 4.
- 2 H. Salecker, Z. Naturf. 8a (1953) 16.
H. Salecker, Z. Naturf. 10a (1955) 349.
S.D. Drell, Ann. of Phys. 4 (1958) 75.
J.D. Bjorken, S.D. Drell, S.C. Frautschi, Phys. Rev. 112 (1958) 1409.
J.D. Bjorken, S.D. Drell, Phys. Rev. 114 (1959) 1368.
H. Salecker, Zeits. Phys. 160 (1960) 385.
- 3 N.M. Kroll, Nuovo Cim. A45 (1966) 65.
K. Ringhofer, Acta Phys. Austriaca 31 (1970) 67.
M. Magg, K. Ringhofer, H. Salecker, Nucl. Phys. B40 (1972) 367.
K. Ringhofer, H. Salecker, Found. of Phys. 10 (1980) 185.
- 4 J. Kraus, Dissertation, München (1973).
J. Kraus, Nucl. Phys. B89 (1975) 133.
N. Liebsch, Diplomarbeit, München (1972).
N. Liebsch, Dissertation, München (1976).
- 5 H. Schneider, Diplomarbeit, München (1973).

- 6 H.-D. Steinhöfer, Diplomarbeit, München (1975).
- 7 R. Bösch, J. Lang, R. Müller, W. Wölfli, Phys. Lett. 2 (1962) 16; Helv. Phys. Acta 36 (1963) 625.
U. Stierlin, W. Scholz, B. Povh, Zeits. Phys. 170 (1962) 47.
H.E. Jackson; K.J. Wetzel, Phys. Rev. Lett. 22 (1969) 1008.
J. Moffat, M.W. Stringfellow, Proc. Roy. Soc. Lond. A254 (1960) 242.
- 8 A.W. Adler, S.G. Cohen, Phys. Rev. 146 (1966) 1001.
- 9 G. Jarlskog, L. Jönsson, S. Prünster, H.D. Schulz, H.J. Willutzki, G.G. Winter, Phys. Rev. D8 (1973) 3813.
- 10 V.N. Baier, V.S. Fadin, V.M. Katkov, E.A. Kuraev, Phys. Lett. 49B (1974) 385.
- 11 M. Bolsterli, Phys. Rev. 94 (1954) 367.
S.S. Sannikov, Sov. Phys. JETP 15 (1962) 196.
A.P. Bukhvostov, V.Ya. Frenkel', V.M. Shekhter, Sov. Phys. JETP 16 (1963) 467.
- 12 J.M. Jauch, F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons, Addison-Wesley, Reading (Massachusetts) 1954.
- 13 M. Ram, Phys. Rev. D12 (1975) 2043.
- 14 F. Mandl, T.H.R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. Lond. A215 (1952) 497.
- 15 V. Costantini, B. De Tollis, G. Pistoni, Nuovo Cim. A2 (1971) 733.
- 16 Y. Shima, Phys. Rev. 142 (1966) 944.
- 17 R. Karplus, M. Neumann, Phys. Rev. 80 (1950) 380.

- 18 D.R. Hartree, Proc. Camb. Phil. Soc. 24 (1928) 89, 111, 426.
V. Fock, Zeits. Phys. 61 (1930) 126.
- 19 W.J. Byatt, Phys. Rev. 104 (1956) 1298.
- 20 N.F. Mott, H.S.W. Massey, The Theory of Atomic Collisions, Oxford University Press, Oxford 1965.
- 21 L.H. Thomas, Proc. Camb. Phil. Soc. 23 (1926) 542.
E. Fermi, Zeits. Phys. 48 (1928) 73.
- 22 L. Lewin, Dilogarithms and Associated Functions, MacDonald, London 1958.
- 23 H.-D. Steinhöfer, COMRAT Programmspezifikation, München 1976.

Herrn Prof. Dr. H. Salecker danke ich für die Themenstellung, die günstigen Arbeitsbedingungen an seinem Lehrstuhl und die Unterstützung durch klärende Gespräche.

Herrn Dr. T. Anders danke ich für zahlreiche Anregungen.

Dem Leibniz-Rechenzentrum der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, danke ich für die Benutzung seiner Rechenanlagen.

Curriculum vitae

Horst-Dieter Steinhöfer, geboren am
17.7.1949 in München

Eltern Steinhöfer, Rudolf und
 Steinhöfer, Mathilde, geborene Köhler

1955-1959 Volksschule in München

1959-1960 Oberrealschule in München

1960-1962 Oberrealschule in Oberstdorf

1962-1968 Allgäu-Gymnasium in Kempten

23.7.1968 Abitur

1968-1977 Studium der Physik an der Ludwig-
 Maximilians-Universität München

8.2.1972 Diplom-Vorprüfung für Studierende
 der Physik

1973-1975 Diplomarbeit bei Herrn Prof. Dr.
 H. Salecker über "Symmetrische koplanare
 Photonspaltung und Prüfung des Elektronen-
 propagators der Quantenelektrodynamik"

6.6.1975 Diplom-Hauptprüfung für Studierende
 der Physik

Stipendien BayBFG, GFG

Seit August 1977 Verwalter der Dienst-
geschäfte eines wissenschaftlichen
Assistenten

